This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

QA
805
.C29

PROBLÈMES DE MÉCANIQUE

PROBLÈMES DE MÉCANIQUE

Alexandre Ziwet

PROBLÈMES

DE

MÉCANIQUE

A L'USAGE

DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
ET DE PREMIÈRE-SCIENCES, ET DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT
ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

PAR

Th. Théodule CARONNET

DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PROFESSEUR DE MÉCANIQUE AU COLLÈGE CHAPTAL

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

17, RUE DES ÉCOLES, 17

1898

(Tous droits réservés.)

Prof. Alex. Zivet
gt.
2-26-1928

PROBLÈMES DE MÉCANIQUE

STATIQUE

CHAPITRE I

FORCES CONCOURANTES. — ÉQUILIBRE DU POINT MATÉRIEL LIBRE

1. Des forces concourantes en nombre quelconque admettent une résultante. Cette résultante qui s'obtient géométriquement au moyen du polygone des forces, est représentée en grandeur et direction par le segment qui joint le point de départ au point d'arrivée.

On peut aussi la déterminer analytiquement, il suffit pour cela de rapporter l'espace à trois axes rectangulaires (O xyz) ; le théorème des projections donne alors les trois relations

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n ;$$

X_i, Y_i, Z_i représentant les projections de F_i et X, Z, Y celles de la résultante R.

D'ailleurs, si l'on introduit les angles des forces avec les axes, ces formules s'écrivent encore

$$R \cos \xi = F_1 \cos a_1 + \cdots + F_n \cos a_n,$$
$$R \cos \eta = F_1 \cos b_1 + \cdots + F_n \cos b_n,$$
$$R \cos \zeta = F_1 \cos c_1 + \cdots + F_n \cos c_n.$$

Ces dernières donnent immédiatement

$$R^2 = \Sigma F_i^2 + 2\Sigma F_i F_k \cos \widehat{(F_i, F_k)},$$

puis ξ, η, ζ, c'est-à-dire l'intensité et la direction de la résultante.

418542

Lorsque les forces sont complanes, les formules précédentes se réduisent à deux, on les obtient en projetant le polygone des forces sur deux axes rectangulaires du plan.

Plus particulièrement, si les forces sont au nombre de deux, on envisage la question sous une autre forme.

Effectivement, dans ce cas, le polygone des forces se réduit à un triangle et les formules de résolution des triangles donnent de plusieurs manières les relations qui existent entre les éléments des deux forces et ceux de leur résultante.

On emploie assez souvent le groupe de formules

$$\frac{F_1}{\sin(F_2, R)} = \frac{F_2}{\sin(R_1, F_1)} = \frac{R}{\sin(F_2, F_1)};$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \widehat{(F_1, F_2)}.$$

2. Le problème de la décomposition d'une force en plusieurs autres concourantes se résout pareillement au moyen des formules données plus haut. Dans le cas de la décomposition d'une force en deux autres concourantes, on est encore ramené à la résolution d'un triangle.

3. Pour que des forces concourantes constituent un système en équilibre, il faut et il suffit que le polygone de ces forces soit fermé, telle est la condition intrinsèque de l'équilibre ; mais sauf dans le cas de trois forces on a rarement recours à ce critérium géométrique.

On fait plus souvent usage des conditions analytiques

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0,$$
$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0,$$
$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0.$$

qui expriment que les sommes des projections des forces sur trois axes formant un trièdre sont séparément nulles.

On peut encore remplacer ces relations par celles que fournissent les moments pris par rapport à trois axes rectangulaires ; on obtient alors les formules

$$\Sigma(x_0Y_i - y_0X_i) = 0,$$
$$\Sigma(y_0Z_i - z_0Y_i) = 0,$$
$$\Sigma(z_0X_i - x_0Z_i) = 0;$$

où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point de concours des forces.

En résumé, il y a trois conditions d'équilibre.

Lorsque les forces sont complanes, ces conditions se réduisent à deux :

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0,$$
$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0.$$

Autrement : pour que des forces concourantes complanes soient en équilibre, il faut et il suffit que les sommes de leurs moments par rapport à deux points du plan non en ligne droite avec leur point de concours soient respectivement nulles.

Enfin, quand il n'y a que trois forces, on emploie avec succès les formules

suivantes attribuées à Stévin :

$$\frac{F_1}{\sin(F_2, F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_3, F_1)} = \frac{F_3}{\sin(F_1, F_2)}.$$

$$\widehat{F_1, F_2} + \widehat{F_2, F_3} + \widehat{F_3, F_1} = 2\pi.$$

4. *Un fil extensible est fixé en son extrémité* O. *On attache à l'autre extrémité un poids* P ; *trouver la position d'équilibre de ce poids sachant que le fil oppose une résistance proportionnelle à l'allongement.*

Soient l la longueur du fil à l'état naturel, x son allongement dans la position d'équilibre du poids P.

Si nous représentons par k la résistance du fil quand il est allongé d'une unité, kx sera la résistance correspondant à l'allongement x et nous aurons pour l'équilibre

$$kx = P,$$

d'où

$$x = \frac{P}{k}.$$

La position d'équilibre du poids P est donc située sur la verticale de O et à une distance de ce point $l + x = l + \frac{P}{k}$.

5. *Équilibre d'un point attiré par trois points fixes en ligne droite avec des intensités égales aux carrés des distances.*

Soient les trois points fixes A, B, C situés en ligne droite dans l'ordre des lettres et $AB = b$, $AC = c$, $(c > b)$.

Pour qu'un point M attiré vers A, B et C soit en équilibre il faut évidemment qu'il appartienne au segment AC. Alors deux cas se présentent.

1° M est situé entre A et B.

Posons $AM = x$, il viendra pour l'équilibre

$$x^2 = (b - x)^2 + (c - x)^2,$$

ou bien

$$f(x) = x^2 - 2(b + c)x + b^2 + c^2 = 0.$$

Les deux racines de cette équation sont réelles et positives.

Nous avons d'ailleurs

$$f(0) = b^2 + c^2 > 0,$$
$$f(b) = c(c - 2b),$$
$$f(b + c) = -2bc < 0.$$

Donc pour que la position M entre A et B existe, c'est-à-dire pour qu'une racine soit comprise entre 0 et b, il faut

$$f(b) < 0,$$

d'où

$$c < 2b.$$

Cette condition étant remplie, il y aura une position d'équilibre et une seule située entre A et B.

2° M est situé entre B et C.

Dans ce cas, nous avons

$$x^2 + (x - b)^2 = (c - x)^2,$$

ou bien

$$f(x) = x^2 - 2(b - c)x + b^2 - c^2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont réelles et de signe contraire; la racine négative est à rejeter, et pour que la racine positive convienne il faut qu'elle soit comprise entre b et c, c'est-à-dire que l'on ait

$$f(b)\, f(c) < 0,$$

d'où

$$c > 2b.$$

En résumé il y a toujours une position d'équilibre qui appartient aux segments AB ou BC suivant que c est inférieure ou supérieure à $2b$; et cet équilibre est stable, comme on le reconnaît aisément.

6. *Décomposer une force* F *en deux autres concourantes rectangulaires et dont les intensités soient avec* F *en progression arithmétique.*

La raison de la progression étant r, les composantes qui sont d'ailleurs inférieures à F s'écriront

$$(1) \qquad X = F - r, \qquad Y = F - 2r;$$

on aura de plus

$$X^2 + Y^2 = F^2,$$

ou bien $$5r^2 - 6Fr + F^2 = 0.$$

Cette équation a pour racines $r' = F$, $r'' = \frac{1}{5}F$.

r' est à rejeter car elle donne $X = 0$, il vient donc en remplaçant r par r'' dans les relations (1)

$$X = \frac{4}{5}F, \qquad Y = \frac{3}{5}F.$$

Les directions de ces forces sont données par

$$\operatorname{tg}(\widehat{X, F}) = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad \widehat{Y, F} = 90^\circ - \widehat{X, F}.$$

7. *Trouver l'angle α de deux forces concourantes* P *et* Q, *sachant que leur résultante a pour intensité* $\frac{P+Q}{2}$. *Discussion.*

(*Saint-Cyr*, *1889*.)

La formule $$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
nous donne
$$\frac{1}{4}(P+Q)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha,$$
d'où $$\cos\alpha = \frac{2PQ - 3P^2 - 3Q^2}{8PQ}.$$

Pour que α existe il faut
$$(2PQ - 3P^2 - 3Q^2)^2 - 64P^2Q^2 < 0,$$
ou bien
$$-3(P+Q)^2(10PQ - 3P^2 - 3Q^2) < 0,$$
c'est-à-dire
$$3\left(\frac{P}{Q}\right)^2 - 10\left(\frac{P}{Q}\right) + 3 < 0,$$
inégalité qui délimite comme il suit le rapport $\frac{P}{Q}$:
$$\frac{1}{3} < \frac{P}{Q} < 3.$$

Quand $P = Q$ on obtient
$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \qquad \alpha = 120^\circ.$$

8. *On donne dans un plan trois droites* OA, OB, OC *issues du même point* O. *La droite* OA *est la bissectrice de l'angle* BOC *qui est égal à* 120°. *On désigne par* F *une force donnée et par* a, *un angle donné. On applique suivant* OA *une force* $F \cos a$, *suivant* OB *une force* $F(\cos a - \sqrt{3} \sin a)$ *et suivant* OC *une force égale à* $F(\cos a + \sqrt{3} \sin a)$. *Trouver la grandeur de la résultante de ces trois forces et l'angle qu'elle fait avec* OA.

(*Bacc. lettres-math., Marseille 1894.*)

Projetons sur deux axes rectangulaires Ox, Oy, le premier étant dirigé suivant OA, nous aurons en appelant X et Y les projections de la résultante R :

$$X = F\cos a + \frac{F}{2}(\cos a + \sqrt{3}\sin a) + \frac{F}{2}(\cos a - \sqrt{3}\sin a) = 2F\cos a,$$

$$Y = \frac{F\sqrt{3}}{2}(\cos a + \sqrt{3}\sin a) - \frac{F\sqrt{3}}{2}(\cos a - \sqrt{3}\sin a) = 3F\sin a.$$

Il viendra donc

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{4 + 5\sin^2 a}.$$

En outre, ω étant l'angle de la résultante avec OA, nous aurons

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{Y}{X} = \frac{3}{2} \operatorname{tg} a.$$

9. *En* A *sont appliquées des forces* AB, AC, AD, AE, AF *égales respectivement à* $3\sqrt{2}$, 4, 5, 7 *et* 2 *et dont les directions sont définies par* $\widehat{AC, AB} = 45°$, $\widehat{AD, AB} = 135°$, $\widehat{AE, AB} = 225°$, $\widehat{AF, AB} = 315°$.

Démontrer que ce système est en équilibre.

(*Saint-Cyr, 1889.*)

Appelons α l'angle d'une force quelconque avec AB nous aurons le tableau suivant :

Forces	α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$3\sqrt{2}$	0	1	0
4	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

5	135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
7	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Nons aurons par suite en projetant sur AB et une perpendiculaire à cette direction, et en appelant R_x, R_y les projections de la résultante

$$R_x = 3\sqrt{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 7\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$R_y = \quad 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 7\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Ce qui prouve que les forces constituent un système en équilibre.

10. *La résultante d'un système quelconque de forces concourantes* $\overline{MA_1}$, $\overline{MA_2}$, ..., $\overline{MA_n}$ *est dirigée suivant la droite* MO *qui joint leur point de concours au centre* O *des moyennes distances des extrémités* A_1, A_2, ..., A_n *et a pour intensité* nMO.

Le théorème est évidemment vrai pour deux forces. Pour le généraliser, supposons-le démontré pour les $(n-1)$ forces $\overline{MA_1}, \ldots, \overline{MA_{n-1}}$; soit donc MX′ leur résultante qui passe par le centre X des moyennes distances des points A_1, A_2, ..., A_{n-1} et d'intensité $MX' = (n-1)MX$.

Composons $\overline{MX'}$ et $\overline{MA_n}$ d'après la règle du parallélogramme, nous obtiendrons comme résultante finale $\overline{MO'}$ qui coupe XA_n au point O.

Ceci fait, remarquons que les triangles OMX, $O'OA_n$ sont semblables et que leur rapport de similitude est égal à $\frac{A_nO'}{MX} = \frac{MX'}{MX} = n-1$, nous aurons

$$\frac{OX}{1} = \frac{OA_n}{n-1};$$

donc O est le centre des moyennes distances des points

$A_1, A_2, \ldots, A_n$. Il vient en outre

$$OO' = (n - 1)\,MO,$$

d'où

$$MO' = nMO.$$

Remarque. — La position d'équilibre d'un point M *sollicité par des forces* $\overline{MA_1}, \overline{MA_2}, \ldots, \overline{MA_n}$ *coïncide avec le centre des moyennes distances des points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

L'équilibre est d'ailleurs stable.

11. *On partage une circonférence en n parties égales et on joint un point quelconque* M *de son plan aux points de division. Déterminer le résultant des segments ainsi obtenus.*

Le centre des moyennes distances des points de division, c'est-à-dire des extrémités des forces est le centre O de la circonférence ; par conséquent comme il y a n forces, leur résultante sera dirigée suivant MO et aura pour intensité nMO.

Le point M sera en équilibre quand il coïncidera avec le centre de la circonférence.

12. *Un triangle* ABC *est rectangle en* A, *on partage l'hypoténuse en n parties égales* $BB_1, B_1B_2, \ldots, B_{n-1}C$. *Déterminer la résultante des forces représentées par les segments* $\overline{AB}, \overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \ldots, \overline{AC}$.

1° $n = 2k + 1$. — Il y a $2k + 2$ forces, si l'on groupe les forces deux à deux, les forces d'un groupe ayant leurs extrémités symétriques par rapport au milieu A′ de BC, on voit aisément que chaque groupe aura sa résultante dirigée suivant AA′ et d'intensité $2AA' = BC$.

La résultante générale sera donc dirigée suivant la médiane AA′ et aura pour intensité $(k + 1)BC = \frac{n+1}{2}BC$.

2° $n = 2k$. — Il y a dans ce cas $2k + 1$ forces, l'une dirigée suivant AA′ d'intensité AA′, les $2k$ autres que l'on

pourra associer comme précédemment et dont la résultante d'intensité kBC sera dirigée vers AA'.

La résultante finale aura donc encore pour direction celle de la médiane AA' et pour intensité $k\mathrm{BC} + \frac{\mathrm{BC}}{2} = \frac{n+1}{2}\mathrm{BC}$.

Autre solution. — Le centre des moyennes distances des extrémités B, $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_{n-1}$, C est le milieu A', il y a $(n+1)$ forces, dont la résultante passera par A' (10) et aura pour intensité $(n+1)\mathrm{AA}' = \frac{n+1}{2}\mathrm{BC}$.

13. *On donne dans un plan : deux axes rectangulaires* Oxy, *une force* OF *faisant l'angle* φ *avec* Ox *et trois directions inclinées sur* Ox *de* α, 2α, 3α ; *décomposer la force* F *en trois autres concourantes en* O *d'égale intensité et suivant les trois directions données.*

En appelant f l'intensité commune des trois composantes et projetant sur les axes, il viendra

$$f(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha) = \mathrm{F}\cos\varphi,$$

$$f(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha) = \mathrm{F}\sin\varphi,$$

ou bien

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos 2\alpha(1 + 2\cos\alpha)f = \mathrm{F}\cos\varphi, \\ \sin 2\alpha(1 + 2\cos\alpha)f = \mathrm{F}\sin\varphi. \end{cases}$$

Ce système nous montre que α ne peut pas être arbitraire et nous donne

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}\varphi,$$

d'où $\qquad 2\alpha = \varphi \qquad$ ou $\qquad 2\alpha = \pi + \varphi$;

c'est-à-dire que la direction qui fait l'angle 2α avec Ox coïncide avec OF ou lui est directement opposée ; nous obtenons ensuite en élevant les équations (1) et additionnant

$$f = \pm\frac{\mathrm{F}}{1 + 2\cos\alpha},$$

f étant nécessairement positive on adoptera le signe qui rend le second membre positif.

Application. — $\varphi = 60°$, $F = 12^{kg}$.

On trouve :

1° $\alpha = 30°$, $f = 6(\sqrt{3} - 1)$.

2° $\alpha = 120°$, $f = 6(\sqrt{3} + 1)$.

14. *Composition des attractions réciproques aux distances exercées par n points fixes* A_1, A_2, ..., A_n *sur un point* M.

Posons : $MA_1 = r_1$, $MA_2 = r_2$, ..., $MA_n = r_n$.

Le point M est sollicité par les forces d'intensités $\frac{k}{r_1}$, $\frac{k}{r_2}$, ..., $\frac{k}{r_n}$ et dirigées respectivement suivant MA_1, MA_2, ...

Pour composer ces forces, considérons la figure inverse de la figure formée par les points fixes, M étant le pôle d'inversion et k la puissance; nous obtiendrons les points a_1, a_2, ..., a_n.

Ceci fait, en vertu des relations $Ma_1 = \frac{k}{MA_1}$, ..., nous pourrons considérer le point M comme attiré par les points a_1, a_2, ..., avec des intensités égales aux distances.

La résultante des forces données sera donc dirigée suivant $\overline{M\alpha}$, et aura pour intensité $n.\overline{M\alpha}$, en appelant α le centre des moyennes distances des points a_1, a_2, ...

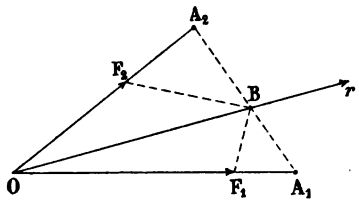
Le point M sera en équilibre quand il coïncidera avec α, par conséquent la recherche de la position d'équilibre d'un point attiré par des points fixes avec des intensités inverses aux distances se résout avec le problème suivant : *Trouver un point* α *tel qu'en le prenant pour pôle d'inversion il coïncide avec le centre des moyennes distances des points de la figure transformée.*

15. *Équilibre d'un point matériel attiré proportionnellement à la masse et à la distance par n points fixes.*

Considérons d'abord le cas le plus simple de deux points attractifs. Soient donc les points A_1, A_2 de masses m_1, m_2 attirant le point O avec les intensités :

$$F_1 = km_1OA_1, \qquad F_2 = km_2OA_2.$$

Prenons les moments par rapport au point B où la résultante Or de ces forces coupe A_1A_2, nous aurons :



(1) surf. BOF_1 = surf. BOF_2,

mais

$$\frac{\text{surf. } BOF_1}{\text{surf. } BOA_1} = \frac{OF_1}{OA_1} = km_1,$$

$$\frac{\text{surf. } BOF_2}{\text{surf. } BOA_2} = \frac{OF_2}{OA_2} = km_2,$$

donc, en substituant dans (1) il viendra

$$m_1 . \text{ surf. } BOA_1 = m_2 . \text{ surf. } BOA_2,$$

ou bien

$$m_1 . BA_1 = m_2 . BA_2.$$

Donc le point B divise A_1A_2 dans le rapport inverse à celui des masses.

Calculons maintenant l'intensité Or de la résultante.

Pour cela prenons les moments par rapport à A_2, il viendra

$$m^t\, Or = m^t\, OF_1,$$

ou bien

$$\text{surf. } A_2Or = \text{surf. } A_2OF_1.$$

Mais nous avons

$$\frac{\text{surf. } A_2Or}{\text{surf. } A_2OB} = \frac{Or}{OB}, \qquad \frac{\text{surf. } A_2OF_1}{\text{surf. } A_2OA_1} = \frac{OF_1}{OA_1} = km_1,$$

donc en remplaçant, nous obtiendrons

$$\frac{Or}{OB} \text{ surf. } A_2OB = km_1 . \text{ surf. } A_2OA_1,$$

d'où

$$Or = km_1 . OB . \frac{\text{surf. } A_2OA_1}{\text{surf. } A_2OB} = km_1 . OB . \frac{A_2A_1}{A_2B},$$

ou bien encore, en vertu de la relation

$$\frac{A_2A_1}{A_2B} = \frac{m_1 + m_2}{m_1},$$

$$Or = k . (m_1 + m_2) . OB.$$

On généralise d'ailleurs sans difficulté comme au n° 10 et on voit que les *n attractions se composent en une attraction dirigée*

vers le centre de masses G *des points attractifs et d'intensité égale à* $k(m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_n)\,\mathrm{OG}$.

Par suite le point attiré O sera en équilibre quand on aura $\mathrm{OG} = 0$, c'est-à-dire quand il coïncidera avec le centre de masses G.

Solution analytique. — Rapportons l'espace au trièdre trirectangle $Oxyz$, et soient $(x_1, y_1, z_1), \ldots\ldots, (x_n, y_n, z_n)$ les coordonnées des points $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$; $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$ leurs distances à l'origine.

Les projections de $\mathrm{OF}_1 = km_1r_1$ sur les axes sont

$$km_1r_1\frac{x_1}{r_1} = km_1x_1,$$

$$km_1r_1\frac{y_1}{r_1} = km_1y_1,$$

$$km_1r_1\frac{z_1}{r_1} = km_1z_1.$$

Ceci posé, appelons X, Y, Z les composantes suivant les axes de la résultante des n attractions, nous aurons en appliquant le théorème des projections

$$\mathrm{X} = km_1x_1 + km_2x_2 + \cdots\cdots + km_nx_n = k(m_1 + m_2 + \cdots)\frac{\Sigma m_1x_1}{\Sigma m_1},$$

$$\mathrm{Y} = km_1y_1 + km_2y_2 + \cdots\cdots + km_ny_n = k(m_1 + m_2 + \cdots)\frac{\Sigma m_1y_1}{\Sigma m_1},$$

$$\mathrm{Z} = km_1z_1 + km_2z_2 + \cdots\cdots + km_nz_n = k(m_1 + m_2 + \cdots)\frac{\Sigma m_1z_1}{\Sigma m_1},$$

ou bien

$$\mathrm{X} = k\Sigma m_1.\alpha,$$

$$\mathrm{Y} = k\Sigma m_1.\beta,$$

$$\mathrm{Z} = k\Sigma m_1.\gamma,$$

α, β, γ étant les coordonnées du centre de masses G.

La forme de ces expressions nous montre bien que X, Y, Z sont les projections sur les axes d'une force qui est dirigée suivant OG et qui a pour intensité $k(m_1 + m_2 + \ldots\ldots)\,\mathrm{OG}$.

Remarque. — Si le point O est *repoussé* au lieu d'être attiré

on trouve des résultats analogues. Il suffit d'ailleurs dans les calculs précédents de remplacer k par $-k$.

16. *Équilibre d'un point* M *attiré par les trois sommets d'un triangle* ABC *avec des intensités égales.*

Pour l'équilibre, le point M doit se trouver à l'intérieur du triangle; en effet dans le cas contraire, les trois forces étant dirigées d'un même côté d'une droite ne peuvent s'équilibrer. En outre les trois forces étant égales, le polygone des forces est un triangle équilatéral; les forces font donc deux à deux des angles de 120°.

Le point M sera par suite en équilibre quand il verra les trois côtés du triangle sous le même angle 120°.

On le construit facilement, mais pour qu'il existe il faut et il suffit que les angles du triangle soient respectivement inférieurs à 120°.

17. *D'un point* M *on abaisse les perpendiculaires* MA′, MB′, MC′ *sur les côtés d'un triangle. Trouver la position d'équilibre de ce point en le supposant sollicité par trois forces représentées en grandeur et direction par les segments* $\overline{MA'}$, $\overline{MB'}$, $\overline{MC'}$.

Quand le point M est extérieur au triangle les trois forces sont dirigées d'un même côté d'une droite et par suite ne peuvent se faire équilibre. Supposons donc M intérieur au triangle.

Alors les angles des forces sont précisément les suppléments des angles du triangle et les formules de Stévin donnent

$$\frac{MA'}{\sin A} = \frac{MB'}{\sin B} = \frac{MC'}{\sin C},$$

ou bien

$$\frac{MA'}{a} = \frac{MB'}{b} = \frac{MC'}{c} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ces relations définissent la position M par ses distances aux côtés du triangle.

On peut encore le considérer comme le point de concours des trois droites AM, BM, CM lieux des points dont le rapport des distances aux deux côtés du triangle qui les comprennent est égal à celui des côtés.

Ces trois droites sont les *symédianes* du triangle.

18. *Étant donné un triangle invariable, quelles forces faut-il appliquer : 1° suivant les médianes ; 2° suivant les hauteurs ; 3° suivant les bissectrices intérieures, pour que ce triangle soit successivement en équilibre sous l'action de chacun de ces systèmes triples de forces ?*

1° Soient AA′, BB′, CC′ les médianes du triangle ABC, O leur point de concours et α, β, γ les angles $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, $\widehat{AOB}$, qu'elles font deux à deux, enfin F, F′, F″ les forces qui dirigées suivant ces droites se font équilibre.

Nous aurons

$$(1) \qquad \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{F'}{\sin\beta} = \frac{F''}{\sin\gamma};$$

mais les triangles OAB, OBC, OCA sont équivalents et on a

$$OB.OC \sin\alpha = OC.OA \sin\beta = OA.OB \sin\gamma,$$

ou bien

$$\frac{\sin\alpha}{OA} = \frac{\sin\beta}{OB} = \frac{\sin\gamma}{OC}.$$

Il viendra donc en remplaçant dans (1)

$$\frac{F}{OA} = \frac{F'}{OB} = \frac{F''}{OC}.$$

Les intensités des forces doivent donc être choisies proportionnelles aux médianes du triangle.

2° Conservant les mêmes notations, nous obtiendrons encore les relations (1), mais dans ce cas on a

$$\alpha = \pi - A, \qquad \beta = \pi - B, \qquad \gamma = \pi - C;$$

et il vient

$$\frac{F}{\sin A} = \frac{F'}{\sin B} = \frac{F''}{\sin C},$$

ou bien

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{b} = \frac{F''}{c},$$

de sorte que les forces doivent être proportionnelles aux côtés.

Si le triangle est acutangle elles seront dirigées toutes vers les sommets ou toutes en sens opposé; quand le triangle a un angle obtus, il y en aura une seulement qui sera dirigée vers un sommet ou en sens opposé.

3° Si les droites AA′, BB′, CC′ sont bissectrices intérieures, on obtient

$$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{F'}{\sin\beta} = \frac{F''}{\sin\gamma},$$

avec $\alpha = \pi - \frac{B+C}{2}$, $\beta = \pi - \frac{A+C}{2}$, $\gamma = \pi - \frac{A+B}{2}$,

de sorte qu'il vient

$$\frac{F}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{F'}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{F''}{\cos\frac{C}{2}}.$$

19. *Déterminer la résultante de trois forces concourantes, connaissant leurs intensités* F_1, F_2, F_3 *et les angles* (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β) *qu'elles font avec trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz.

Dans quelles conditions l'équilibre existera-t-il?

1° Soit R l'intensité de la résultante et ξ, η, ζ les angles de sa direction avec Ox, Oy, Oz; le théorème des projections nous donnera

$$(1)\qquad \begin{cases} R\cos\xi = F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma, \\ R\cos\eta = F_1\cos\beta + F_2\cos\gamma + F_3\cos\alpha, \\ R\cos\zeta = F_1\cos\gamma + F_2\cos\alpha + F_3\cos\beta, \end{cases}$$

d'où nous tirons

$$(2)\qquad R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha) \times (F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_1).$$

(2) nous donne l'intensité R et les relations (1) nous fourniront ensuite $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, c'est-à-dire ξ, η, ζ.

2° Les conditions d'équilibre s'écriront en projetant sur les axes

$$(2)\qquad \begin{cases} F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma = 0, \\ F_1\cos\beta + F_2\cos\gamma + F_3\cos\alpha = 0, \\ F_1\cos\gamma + F_2\cos\alpha + F_3\cos\beta = 0. \end{cases}$$

Additionnons, nous aurons

$$(F_1 + F_2 + F_3)(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = 0,$$

d'où

$$(3)\qquad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0,$$

puisque F_1, F_2 et F_3 sont des quantités essentiellement positives. Élevons (3) au carré il viendra en vertu de

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\gamma = -\frac{1}{2}.$$

Alors si nous élevons les équations (2) au carré et les additionnons, nous obtiendrons

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - F_1F_2 - F_2F_3 - F_3F_1 = 0,$$

ou bien

$$(F_1 - F_2)^2 + (F_2 - F_3)^2 + (F_3 - F_1)^2 = 0,$$

relation qui entraîne

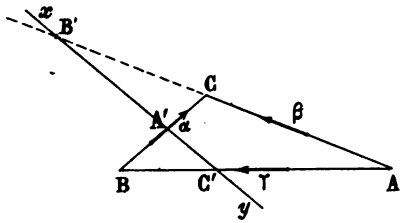
$$F_1 = F_2 = F_3.$$

Ces conditions jointes à (3) sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre ; on voit en effet que les relations (2) sont vérifiées dans ces hypothèses.

20. *Trois forces* α, β, γ *d'égale intensité* f *sont dirigées suivant les côtés d'un triangle* ABC *et dans le sens des segments* $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$.

Trouver leur résultante et donner une propriété géométrique dont jouissent tous les points de sa droite d'action.

La résultante de β et γ est dirigée suivant la bissectrice intérieure AA′, donc la résultante des trois forces passe par A′.



On verrait de même en composant α et β, puis α et γ qu'elle passe par les points C′ et B′, l'un pied de la bissectrice intérieure CC′, l'autre pied de la bissectrice extérieure BB′.

Ces trois points sont donc en ligne droite et la résultante est dirigée suivant cette droite.

Évaluons son intensité, pour cela projetons sur AB et sur une perpendiculaire à ce côté, nous aurons en appelant R′, R″ les projections de la résultante,

$$R' = (1 - \cos B + \cos A)f,$$

$$R'' = (\sin B + \sin A)f,$$

d'où $\quad R^2 = R'^2 + R''^2 = [3 + 2(\cos C + \cos A - \cos B)]f^2$

et $\quad R = f\sqrt{3 + 2(\cos C + \cos A - \cos B)}.$

Ceci posé, pour répondre à la seconde question prenons les moments par rapport à un point O de la résultante, nous aurons en appelant δ_A, δ_B, δ_C les distances de ce point aux côtés du triangle :

1° O est situé sur B′x ou sur C′y.

$$\delta_A = \delta_B + \delta_C$$

2° O est situé sur B′A′.

$$\delta_C = \delta_B + \delta_A$$

3° O est situé sur A′C′.

$$\delta_B = \delta_A + \delta_C.$$

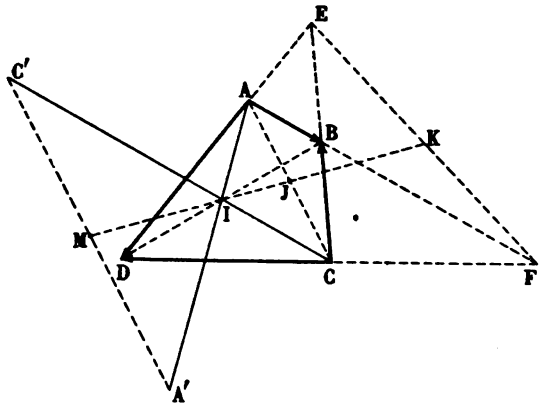
En changeant convenablement le sens des forces on obtiendrait deux autres droites qui jointes à A′B′C′ constituent le lieu complet des points dont la distance à l'un des côtés du triangle est égale à la somme des distances aux deux autres côtés.

21. *On donne un quadrilatère solide* ABCD *et les forces représentées en grandeur et direction par* $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$.

Démontrer que leur résultante passe par les milieux I *et* J *des diagonales et a pour intensité* 4IJ.

(*Saint-Cyr.*)

La résultante de $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$ passe par le milieu I de BD et a pour intensité 2AI, transportons son point d'application en I elle sera figurée en IA'. Pareillement la résultante de $\overline{CB}$ et $\overline{CD}$



dont le point d'application a été transporté au point I de sa direction sera représentée par IC' = 2CI.

Enfin $\overline{IC'}$ et $\overline{IA'}$ se composent pour donner la résultante finale dirigée suivant IM et d'intensité 2IM.

Or les deux triangles AIC et A'IC' sont semblables, par conséquent IM qui passe par le milieu M de A'C' coupera AC en son milieu J et nous aurons

$$\frac{IM}{IJ} = \frac{A'C'}{AC} = 2,$$

d'où

$$2IM = 4IJ.$$

Remarque. — Prenons les moments par rapport au milieu K de la diagonale qui joint les faux sommets du quadrilatère.

Nous avons

$$m^t\,\overline{AB} = 2.ABK = ABE, \qquad m^t\,\overline{AD} = 2.ADK = ADF,$$

$$m^t\,\overline{CD} = -2.CDK = -CDE, \quad m^t\,\overline{CB} = 2.CBK = BCF.$$

Il viendra donc

$$m^t\,\text{résultante} = m^t\,\overline{AB} + m^t\,\overline{AD} + m^t\,\overline{CD} + m^t\,\overline{CB} = 0\,;$$

par suite comme la résultante n'est pas nulle, elle passera par le point K et nous démontrons ainsi le théorème suivant dû à Newton : *Dans un quadrilatère complet les milieux des trois diagonales sont en ligne droite* (Droite de Newton).

22. *Dans un plan faisant partie d'un solide invariable, on donne deux points* A *et* B *et deux forces* $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ *appliquées en ces points. On fait tourner ces forces autour de leurs points d'application d'un même angle variable et dans le même sens. Démontrer sur cette figure les propriétés suivantes :*

1° *L'angle des forces* P *et* Q *demeure constant ;*

2° *Leur point de concours* M *parcourt le segment capable de l'angle* $\widehat{(P, Q)}$ *décrit sur* AB *comme corde ;*

3° *La résultante tourne du même angle que les forces* P *et* Q ;

4° *Cette rotation s'effectue autour d'un point fixe* C *du cercle décrit par le point* M ;

5° *Ce point* C *est tel que les cordes* CA *et* CB *sont inversement proportionnelles aux forces* AP *et* BQ.

(d'Ocagne.)

1° et 2°. Faisons tourner dans le même sens et d'un même angle AP et BQ, nous obtenons les forces AP′ et BQ′.

Nous avons

$$\widehat{P',Q'} = \widehat{P',P} + \widehat{P,Q} - \widehat{Q',Q},$$

mais

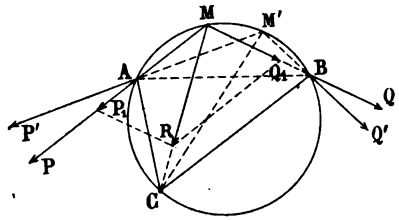
$$\widehat{P',P} = \widehat{Q',Q},$$

donc

$$\widehat{P',Q'} = \widehat{P,Q}.$$

Il suit de là que le lieu du point de concours M de AP et BQ est le segment capable de l'angle $\widehat{P, Q}$ décrit sur AB comme corde.

3° et 4° Portons $MP_1 = AP$, $MQ_1 = BQ$ et soit MR la résultante de ces deux forces c'est-à-dire de AP et de BQ.



Quand le point M décrit le segment de circonférence AMB, le parallélogramme MP_1RQ_1 reste égal à lui-même (comme ayant un angle constant compris entre deux côtés respectivement invariables).

L'angle AMR demeure donc constant, c'est-à-dire que MR coupe la circonférence lieu de M en un point fixe C.

Quand M est venu en M', la résultante a tourné de $\widehat{MCM'} = \widehat{MAM'} = \widehat{P,P'}$, c'est-à-dire du même angle que les forces, autour du point C.

5° Joignons CA, CB ; nous avons dans les triangles MAC et MBC,

$$\frac{CA}{\sin(R, P)} = 2\rho = \frac{CB}{\sin(R, Q)},$$

ρ étant le rayon de la circonférence lieu de M ; donc

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\sin(R, P)}{\sin(Q, R)},$$

mais si R est la résultante de deux forces concourantes P, Q, on a les relations

$$\frac{P}{\sin(R, Q)} = \frac{Q}{\sin(P, R)} = \frac{R}{\sin(Q, P)}$$

et il viendra

$$\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}.$$

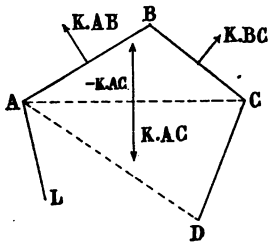
Remarque. — On généralise sans difficulté et on voit que si l'on fait tourner des forces situées dans un même plan, d'un même angle et dans le même sens autour de leurs points d'application, leur résultante tourne d'un même angle et dans le même sens autour d'un point fixe.

23. *Étant donné un triangle solide* ABC, *on applique aux milieux des côtés trois forces perpendiculaires à ces côtés, proportionnelles à leurs longueurs et dirigées toutes les trois vers l'extérieur ou l'intérieur.*

1° *Démontrer que ces forces se font équilibre.*

2° *Étendre ce théorème au cas d'un polygone plan quelconque.*

1° Soient les forces Ka, Kb, Kc appliquées aux milieux des côtés du triangle, elles concourent au centre du cercle circonscrit à ABC. Projetons-les sur AB puis sur une perpendiculaire à cette direction, nous obtiendrons comme sommes de leurs projections :



$$K(a \sin B - b \sin A)$$

et $\quad K(c - a \cos B - b \cos A)$.

Or, en vertu de formules connues, ces deux quantités sont nulles, par conséquent le triangle est en équilibre.

Plus simplement, considérons un triangle $\alpha\beta\gamma$ ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ABC, $\alpha\beta\gamma$ et ABC seront semblables et si K est le rapport de similitude, $\alpha\beta\gamma$ sera précisément le polygone de nos forces.

Comme ce polygone est fermé, les trois forces se font équilibre.

2° Soit le polygone ABCDE... et décomposons-le en triangles par les diagonales issues de A.

Au milieu de AC, perpendiculairement à cette diagonale, appliquons deux forces égales K.AC, —K.AC et directement opposées; les trois forces K.AB, K.BC et K.AC se font équilibre ; en faisant la même opération sur la diagonale AD on démontrera de même que le triangle ACD est en équilibre, etc.

EXERCICES

1. — Équilibre d'un point M attiré par trois points A, B, C en ligne droite inversement à la distance.

2. — On considère un hexagone régulier ABCDEF et les forces représentées par $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$. Résultante de ces forces.

3. — Dans un cercle O, on donne une corde AB fixe et une corde AC mobile autour de A. Position de AC pour que la résultante des forces $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ait une intensité donnée.

(*Saint-Cyr.*)

4. — Dans un cercle dont le diamètre AOA′ est horizontal, on fait mouvoir un couple de cordes verticales et équidistantes BC, B′C′. Résultante des quatre forces $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$. Montrer qu'elle est constante.

5. — Décomposer une force F en deux autres concourantes rectangulaires de somme nF. — Application : $n = \frac{7}{5}$.

6. — Trois forces se font équilibre : leurs intensités sont proportionnelles à $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5 - \sqrt{6}}$. Quels sont les angles que ces forces font entre elles deux à deux?

(*Bacc. Poitiers.*)

7. — Au centre d'un pentagone régulier on applique quatre forces représentées par quatre des rayons, aboutissant aux sommets et l'on demande de déterminer la résultante de ces forces.

(*Conc. acad., Paris, 1872.*)

8. — Au point d'intersection H des hauteurs d'un triangle ABC, on applique les forces $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$. Résultante de ces trois forces.

9. — Le point O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, résultante des forces OA, OB, OC.

10. — Position d'équilibre d'un point M, attiré vers les trois sommets d'un triangle par des forces constantes, mais qui sont entre elles dans le même rapport que les côtés opposés aux sommets dont elles émanent respectivement.

(De Saint-Germain.)

11. — Équilibre d'un point M attiré par les sommets du triangle ABC,

1° Avec des intensités : $a.MA$, $b.MB$, $c.MC$;

2° Avec des intensités : $a^2.MA$, $b^2.MB$, $c^2.MC$.

12. — Décomposer une force en deux autres concourantes, telles que leur angle soit de 60° et que leur somme soit maximum.

(*Saint-Cyr, 1889.*)

13. — Au point qui divise en deux parties égales le segment qui a pour extrémités les milieux des diagonales d'un quadrilatère convexe, on applique quatre forces représentées respectivement par les segments aboutissant aux sommets. Démontrer que le système est en équilibre.

14. — Trouver la position d'équilibre d'un point matériel attiré par les sommets d'un triangle avec des intensités données.

15. — Six forces $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ sont appliquées à un même point O. Elles ont même intensité 10^{kg} ; les trois premières sont dirigées suivant les arêtes du trièdre trirectangle $Oxyz$, les trois autres suivant les bissectrices des faces de ce trièdre. Évaluer les éléments de leur résultante.

16. — On donne trois points A, B, C en ligne droite; le point B est placé entre A et C, $AB = 10^m$, $BC = 20^m$. Par B on mène une droite BD faisant avec BC un angle de 60°, on abaisse du point C une perpendiculaire CD sur BD et l'on joint AD.

On applique au point D, dans le prolongement de BD une force $R = 1000^{kg}$; quelles forces P et Q faudra-t-il appliquer suivant DA et DC pour faire équilibre à R?

Si l'angle DBC était quelconque, quel devrait être cet angle pour que Q ait la plus petite valeur possible?

(*Bacc. lettres-math., Marseille, 1895.*)

17. — Décomposer une force F en trois autres concourantes, d'égale intensité nF, formant les arêtes d'un trièdre équifacial et sachant que l'une de ces composantes est parallèle à un plan donné.

18. — Étant donné un tétraèdre, on applique aux centres des circonférences circonscrites aux faces des forces proportionnelles aux aires de ces faces, perpendiculaires respectivement à ces faces et dirigées toutes vers l'extérieur ou toutes vers l'intérieur ; démontrer que ces forces se font équilibre.

Généraliser ce théorème.

19. — Un quadrilatère ABCD est circonscrit à une circonférence, démontrer à l'aide de la composition des quatre forces $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ que la droite de Newton relative à ce quadrilatère passe par le centre de la circonférence. Même question quand on remplace la circonférence par une conique.

20. — Étant donné le polygone ABCDEF..... de $2n$ côtés circonscrit à une circonférence, démontrer que la résultante des forces : $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{ED}$, $\overline{EF}$, ... passe par le centre de la circonférence.

CHAPITRE II

ÉQUILIBRE DU POINT MATÉRIEL GÊNÉ

---

24. La position d'un point dans l'espace dépend de trois paramètres variables, ses coordonnées par exemple.

Ces quantités sont indépendantes, c'est-à-dire susceptibles d'acquérir toutes valeurs données à l'avance, et le point est *libre;* dans le cas contraire il est *gêné* ; en d'autres termes, il est alors soumis à des liaisons qui l'empêchent d'occuper toute position donnée de l'espace.

Ces liaisons, qui donnent naissance à des forces nouvelles appelées *forces de liaison* sont de nature variée; nous nous bornerons à examiner celles que l'on rencontre le plus fréquemment.

1° *Le point est assujetti à rester sur une surface polie.*

La surface exerce sur ce point une réaction normale, et l'on pourra considérer le point comme libre après introduction de cette force de liaison. Les trois équations d'équilibre définiront la position du point sur la surface et donneront l'intensité R de la réaction. Si le point, étant compris entre deux feuillets de la surface ne peut l'abandonner, R pourra avoir tel ou tel sens sur la normale à la surface, mais s'il se déplace d'un côté seulement, R devra nécessairement être dirigée de façon à maintenir l'adhérence. Il sera donc indispensable, en présence des résultats, d'examiner si cette condition est bien remplie.

2° *Le point décrit une courbe polie.*

Comme dans le cas précédent, on introduira la réaction normale de la courbe; les équations d'équilibre feront connaître la position du point, donneront l'intensité de la réaction et définiront sa direction dans le plan normal à la courbe. Mêmes remarques pour le sens de cette réaction.

3° *Le point est attaché à un fil inextensible.*

La force de liaison est la tension T du fil, dirigée suivant le fil, mais d'intensité inconnue.

T devra avoir un sens convenable pour que le fil soit tendu; il faudra

donc s'assurer de cette condition dans l'étude de l'équilibre d'un point soumis à des liaisons de cette nature.

25. *Trois fils élastiques de même matière et de même diamètre sont fixés par leurs extrémités aux trois sommets d'un triangle. On tend ces fils de manière à réunir les extrémités libres en un même nœud. On demande dans quel rapport doivent être les longueurs primitives des fils pour que la position d'équilibre du nœud soit le centre de gravité du triangle. On suppose que la tension est proportionnelle à l'allongement par unité de longueur.*

(*Concours d'agrégation, 1869.*)

Soit le triangle ABC et G son centre de gravité c'est-à-dire le point de concours des médianes, posons $GA = a'$, $GB = b'$, $GC = c'$ et appelons α, β, γ les longueurs des trois fils à l'état naturel.

Le fil α s'étant allongé de $a' - \alpha$, l'allongement par unité de longueur est $\frac{a' - \alpha}{\alpha}$ et sa tension aura pour expression $k\frac{a' - \alpha}{\alpha}$; pareillement les tensions des deux fils β, γ seront $k\frac{b' - \beta}{\beta}$ et $k\frac{c' - \gamma}{\gamma}$.

Ceci posé, on sait que des forces dirigées suivant les trois médianes d'un triangle et qui constituent un système en équilibre sont proportionnelles à ces médianes, nous aurons donc

$$k\frac{a' - \alpha}{a'\alpha} = k\frac{b' - \beta}{b'\beta} = k\frac{c' - \gamma}{c'\gamma},$$

ou plus simplement

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c'}.$$

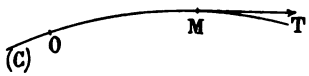
Telles sont les relations demandées.

26. *Stabilité de l'équilibre d'un point assujetti à décrire une courbe polie.*

Supposons que les forces extérieures agissant sur M ne

dépendent que de la position de ce point sur la courbe, et définissons cette position par la longueur x de l'arc OM.

Pour avoir l'équation d'équilibre il suffit d'annuler la somme des projections des forces sur la tangente en M ; en effet, on élimine ainsi la force de liaison d'intensité inconnue, car la réaction de la courbe étant normale à celle-ci, a une projection tangentielle nulle.



Or, projetons les forces sur la direction de la tangente menée dans le sens MT des arcs croissants, nous aurons

$$\mathfrak{X} = F_t + F'_t + \cdots = \Sigma F_t = 0.$$

Ceci posé, écartons M très peu de sa position d'équilibre; $\mathfrak{X}$ qui était nulle pour x_0, prendra une valeur $\Delta\mathfrak{X}$ pour $x_0 + \varepsilon$.

En outre, il y aura stabilité si $\Delta\mathfrak{X}$ et ε sont de signes contraires, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{\Delta\mathfrak{X}}{\varepsilon} < 0.$$

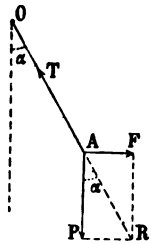
La fonction $\mathfrak{X}$ de x étant supposée continue, $\frac{\Delta\mathfrak{X}}{\varepsilon}$ aura le même signe que $\mathfrak{X}'_x$ pour $x = x_0$.

Donc si $\mathfrak{X}'_x < 0$ il y aura *stabilité*.

On verrait de même que l'*instabilité* est caractérisée par $\mathfrak{X}'_x > 0$; et qu'il y a équilibre *indifférent* si $\mathfrak{X}_x = 0$.

27. *Un point matériel pesant* A *est attaché à l'extrémité d'un cordon fixé lui-même au point* O ; *une force horizontale tient le point en équilibre lorsque l'angle que fait* OA *avec la verticale a la valeur* α ; *calculer l'intensité de cette force et la tension du fil.*

Soient F la force horizontale et T la tension du fil.



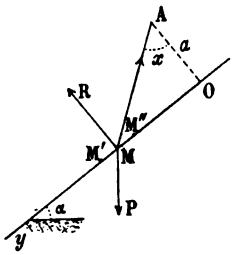
La résultante des forces P et F doit être dirigée suivant le fil et son intensité sera précisément celle de la tension. Or nous avons visiblement

$$P = AR \cos \alpha = T \cos \alpha,$$
$$F = AR \sin \alpha = T \sin \alpha;$$

donc $T = \dfrac{P}{\cos \alpha}$ et $F = P \operatorname{tg} \alpha$.

28. *Equilibre d'un point* M *pesant placé sur un plan incliné poli et attiré par un point fixe* A *proportionnellement à la distance.*

Posons $\widehat{MAO} = x$, et soit $k\overline{MA}$ la force attractive. Projetons sur la ligne de pente Oy et sur OA ; il viendra, en appelant R la réaction du plan,



$$P \sin \alpha - kMA \sin x = 0,$$
$$R + kMA \cos x - P \cos \alpha = 0,$$

ou bien

$$(1) \qquad P \sin \alpha - ka \operatorname{tg} x = 0,$$
$$(2) \qquad R + ka - P \cos \alpha = 0.$$

De (1), nous tirons

$$\operatorname{tg} x = \frac{P}{ka} \sin \alpha,$$

puis x. Il n'y a donc qu'une position d'équilibre.

(2) nous donne pour la réaction normale R du plan

$$R = P \cos \alpha - ka.$$

Or, pour que le point adhère au plan, il faut que l'on ait $R \geqslant 0$, ou bien

$$P \cos \alpha - ka \geqslant 0 \ ;$$

d'où

$$\cos \alpha \geqslant \frac{ka}{P}.$$

Cette inégalité donne une limite pour α si $\dfrac{ka}{P}$ est inférieur à l'unité.

Stabilité. — Nous avons trouvé pour la somme des projections des forces sur oy

$$\mathfrak{X} = P \sin \alpha - ka \operatorname{tg} x = P \sin \alpha - k\mathrm{OM} = 0.$$

Déplaçons M de sa position d'équilibre ; pour la position M′, on aura $\mathfrak{X} < 0$, donc les forces ramèneront le point à sa position initiale ; pareillement si M est écarté en M″, car dans ce cas on aura $\mathfrak{X} > 0$. Il suit de là que l'équilibre est stable.

29. *Un point matériel pesant est placé sur un plan incliné et tenu en équilibre par deux forces égales à la moitié de son poids, l'une horizontale, l'autre suivant une ligne de plus grande pente, toutes deux tendant à faire monter le mobile. Quel est l'angle du plan avec l'horizon ?*

Nous avons en projetant les trois forces sur la ligne de pente

$$(1) \qquad \frac{P}{2} + \frac{P}{2} \cos \alpha - P \sin \alpha = 0,$$

ou bien après suppression du facteur $\cos \frac{\alpha}{2}$,

$$\cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

et

$$(2) \qquad \alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}.$$

Pour avoir la réaction normale R du plan, projetons les forces sur la direction de cette normale, il viendra

$$R = P \cos \alpha + \frac{P}{2} \sin \alpha = \frac{P}{2}(2 \cos \alpha + \sin \alpha),$$

ou bien, en évaluant $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

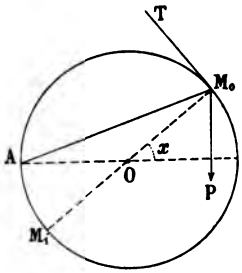
$$R = P.$$

30. *Positions d'équilibre d'un point matériel* M *pesant, assu-*

jetti à décrire une circonférence située dans un plan vertical et attiré par l'extrémité A *du diamètre horizontal suivant la force* $\overline{MA}$.

(*Saint-Cyr.*)

Supposons pour plus de simplicité le rayon de la circonférence de longueur 1, et projetons sur la tangente MT tracée dans le sens des arcs croissants, nous aurons comme équation d'équilibre



$$\mathfrak{P} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - P \cos x = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{P} = \sin x - P \cos x = 0,$$

d'où $\qquad \operatorname{tg} x = P.$

Si x_0 est le plus petit arc positif qui a pour tangente P, il y aura deux solutions au problème

$$x_0 \qquad \text{et} \qquad x_1 = \pi + x_0.$$

M_0 se trouvera dans le premier quadrant et M_1 lui sera diamétralement opposé.

Stabilité. — Nous avons $\mathfrak{P}'_x = \cos x + P \sin x,$

donc $\qquad \mathfrak{P}'_{x_0} = \cos x_0 + P \sin x_0 > 0,$

et $\qquad \mathfrak{P}'_{x_1} = \cos x_1 + P \sin x_1 < 0.$

M_0 sera donc une position d'équilibre stable, tandis qu'il y aura instabilité dans la position M_1.

Ce problème peut se résoudre sans calcul, il suffit d'exprimer que la diagonale du parallélogramme des deux forces MP et MA passe par le centre de la circonférence.

31. *Un cordon* BCD *passe dans un anneau* C *qui est attaché à l'extrémité* C *d'une corde* AC ; *sachant que* AB *est horizontale et que le premier cordon supporte en* D *un poids* P, *trouver la position d'équilibre. On suppose :* $AC = b$, $AB = c = 2b$.

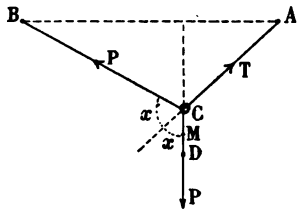
Soit T la tension du cordon AC, celle de BC étant la même

en tous ses points, aura pour valeur P (en effet, tout point M du fil est en équilibre sous l'action de P et de la tension T).

Ceci posé, l'anneau étant en équilibre, AC sera bissectrice de l'angle BCD $= 2x$.

On aura donc $B = 2x - 90^\circ$

et $\widehat{BCA} = 180^\circ - x$;



par suite, en vertu de la relation

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C},$$

il viendra, en remplaçant AC et AB par b et $2b$,

$$2\cos 2x + \sin x = 0,$$

ou $4\sin^2 x + \sin x - 2 = 0,$

d'où $$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}.$$

Or $\sin x$ devant être positif, le problème n'admet que la solution

$$\sin x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}.$$

Nous obtiendrons maintenant pour la tension T, en projetant sur AC

$$T = 2P\cos x,$$

ou bien après substitution,

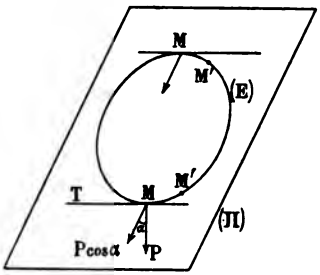
$$T = \frac{1}{4}\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}.P.$$

32. *Etant donnée une ellipse ou une parabole, construire les positions d'équilibre d'un point matériel pesant assujetti à rester sur la courbe.*

Soit une ellipse E située dans le plan (Π) et M une position d'équilibre du poids P.

M étant en repos sous l'effet de P et de la réaction normale de

la courbe, le poids P aura sa direction située dans le plan normal en M à l'ellipse ; par suite si MT est la tangente, on aura



$$\widehat{TMP} = 90°.$$

MT sera donc horizontale.

En résumé on obtiendra les positions d'équilibre du point en menant à l'ellipse des tangentes parallèles aux horizontales du plan (Π). Il y aura toujours deux solutions.

Dans le cas de la parabole on raisonne pareillement, mais le problème n'admet alors qu'une solution.

Stabilité.—Décomposons le poids P suivant la normale au plan et sa projection sur le plan ; la première composante étant normale à la courbe n'aura aucun effet, il restera donc la seconde composante $P \cos \alpha$ dirigée suivant une ligne de pente.

Ceci posé, soit M une position d'équilibre et écartons le point jusqu'en M', il reviendra au point de départ si M' est situé au-dessus de MT, dans le cas contraire il s'en écartera. Il y aura donc stabilité pour la position la plus basse et instabilité pour la seconde.

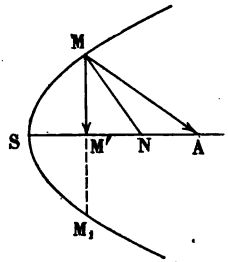
Dans le cas de la parabole la position d'équilibre sera stable si la tangente en ce point est située au-dessous de la courbe et instable dans le cas contraire.

33. *Equilibre d'un point* M *assujetti à rester sur une parabole, sachant qu'il est attiré par l'axe suivant une force représentée en grandeur et direction par la distance du point à cette droite et par un point* A *de l'axe avec une intensité égale à la distance.*

Le milieu de AM' étant N, la résultante des deux forces $\overline{MA}$ et $\overline{MM'}$ sera dirigée suivant MN et égale à 2MN.

Par suite, pour l'équilibre il faudra que MN soit normale

à la courbe ; on a d'ailleurs en vertu de la propriété de la sous-normale à la parabole $M'N = p$, d'où $AM' = 2p$ et on obtiendra les positions d'équilibre M et M_1 en portant suivant AS, $AM' = 2p$ et en cherchant l'intersection avec la courbe de la perpendiculaire à l'axe menée par M'.



Pression. — Comme nous venons de le voir, on a

$$R = 2MN.$$

Soit $SA = a$, alors $SM' = a - 2p$,
et l'équation de la parabole $y^2 - 2px = 0$, nous donnera

$$\overline{MM'}^2 = 2p(a - 2p).$$

Donc, il viendra

$$\overline{MN}^2 = \overline{MM'}^2 + p^2 = p(2a - 3p),$$

d'où $$MN = \sqrt{p(2a - 3p)}\,;$$

et $$R = 2\sqrt{p(2a - 3p)}.$$

Pour que l'équilibre soit possible il faut que M' soit à droite de S, c'est-à-dire que l'on ait

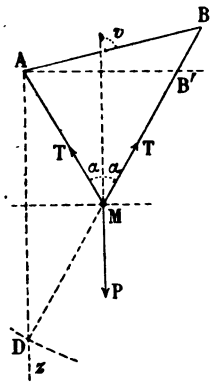
$$a > 2p.$$

D'ailleurs, sous cette condition, R sera bien réelle.

34. *Un fil dont les extrémités sont fixées en deux points* A *et* B *passe à l'intérieur d'un anneau très petit supportant un poids* P.

Trouver la position d'équilibre du système et évaluer la tension du fil.

L'anneau M est soumis à l'action du poids P et des tensions T, T' du fil dirigées suivant CA et CB. Dans la position d'équilibre $T' = T$; effectivement nous pouvons supposer fixe le point B' de MB situé sur l'horizontale AB' et on aura $T = T'$ par raison



de symétrie. Ceci établi, pour qu'il y ait équilibre il faut que P soit égale et directement opposée à la résultante des tensions; la bissectrice de $\widehat{AMB}$ sera donc verticale, et cette condition suffit à définir la forme du triangle AMB. Pour le construire, traçons la verticale Az et prenons son intersection avec la circonférence de centre B et de rayon $BM + MA = l$, joignons le point D le plus bas de cette intersection à B, enfin traçons la perpendiculaire à AD en son milieu, cette droite coupera BD au point M cherché. On voit d'ailleurs aisément que cette construction est toujours possible. (*)

Evaluons la tension T. Projetons les forces sur la verticale nous aurons

$$2T \cos \alpha = P.$$

Pour calculer α, appelons v l'inclinaison de AB sur la verticale et posons $AB = c$, nous aurons

$$\frac{c}{\sin 2\alpha} = \frac{MA}{\sin(v-\alpha)} = \frac{MB}{\sin(v+\alpha)} = \frac{l}{\sin(v-\alpha)+\sin(v+\alpha)},$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{c}{l} \sin v,$$

et

$$\cos \alpha = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - c^2 \sin^2 v}.$$

Il viendra donc finalement

$$T = \frac{Pl}{2\sqrt{l^2 - c^2 \sin^2 v}}.$$

35. *On donne une circonférence* O *dans un plan vertical, et sur la verticale du centre, au-dessus de ce point, en dehors du cercle, on prend un point* C *que l'on considère comme une poulie très*

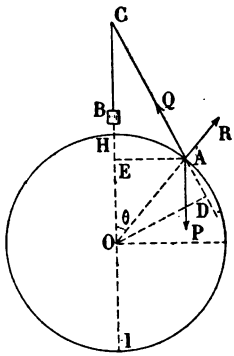
(*) Quand le point M se déplace, il décrit une ellipse de foyers A et B et le tracé précédent résulte de la construction connue des tangentes à l'ellipse parallèles à une direction donnée.

petite. Sur cette poulie passe un fil ACB, *à l'extrémité* B *est suspendu un poids* Q, *en* A *est fixé un anneau qui supporte un poids* P *et qui est assujetti à glisser sans frottement le long de la circonférence. Position d'équilibre du système. — Stabilité.*

(*Agrégation, 1876*; *Bacc. ens. spécial, Rennes, 1890.*)

Soit $OC = c$.

Pour que le système soit en équilibre, il faut que la somme des moments des forces P, et Q dirigée suivant AC par rapport au point O soit nulle, la résultante de ces forces devant être normale au cercle.



Or, nous avons $m^t P = P.EA$,

$m^t Q = -Q.OD$;

mais $CA.OD = OC.EA = c.EA$,

nous aurons donc

$$(1) \quad m^t P + m^t Q = EA\left(P - \frac{c}{CA}Q\right) = 0,$$

d'où $$CA = c\frac{Q}{P}.$$

Nous obtiendrons, par suite, la position A d'équilibre en prenant l'intersection avec la circonférence O de celle qui a pour centre C et pour rayon $c\frac{Q}{P}$; on trouve deux positions d'ailleurs symétriques par rapport à la verticale du point O.

Pour que le problème soit possible, il faut que le triangle COA existe, c'est-à-dire que l'on ait, en appelant a le rayon de la circonférence O,

$$c + a - \frac{cQ}{P} > 0, \qquad c + \frac{cQ}{P} - a > 0, \qquad a + \frac{cQ}{P} - c > 0.$$

Les extrémités I et H du diamètre vertical sont deux positions d'équilibre toujours possibles mais singulières.

Stabilité. — Supposons que l'on écarte A de sa position d'équilibre dans le sens ascendant, CA diminue, on a donc pour la nouvelle position A' :

$$EA'\left(P - \frac{cQ}{CA'}\right) < 0,$$

donc $$m^t P < m^t Q,$$
c'est-à-dire que A continue à s'écarter de sa position d'équilibre ; il y a donc *instabilité*.

EXERCICES

21. — Un point M de poids P, peut se mouvoir sur une circonférence dont le plan est vertical ; il est de plus soumis à une force d'intensité nP répulsive, émanant d'un point A de la circonférence. Positions d'équilibre de ce point.

(*Saint-Cyr.*)

22. — Deux forces données F, F′ sont respectivement parallèles à la base et à la longueur d'un plan incliné dont l'inclinaison i est inconnue.

Elles sollicitent alternativement un point matériel pesant posé sur le plan. On demande quel doit être le poids P de ce point matériel pour qu'il reste en repos dans les deux cas et quelle est l'inclinaison du plan. Condition de possibilité. Quel doit être le rapport $\frac{F}{F'}$ pour que $i = 45°$?

(*Bacc. letttres-sc.; Paris, nov. 1895.*)

23. — Un point M assujetti à décrire une ellipse est attiré par les deux foyers. Calculer les intensités de ces attractions pour que l'équilibre soit indifférent.

24. — En un point A est fixée une corde inextensible qui supporte en C un poids P ; une deuxième corde, fixée en un point B, est liée au point C de la première et l'écarte de la direction verticale. Calculer les tensions des deux cordes CA et CB au moment de l'équilibre, et discuter la tension de CB ; pour déterminer les positions relatives des points A, B, C on mène la verticale du point A et la perpendiculaire BO à cette ligne qui la rencontre en O, on mène par C des parallèles CM et CN, et on se donne $OA = a$, $OB = b$, $CM = \alpha$, $CN = \beta$.

(*Bacc. ès sciences, Clermont.*)

25. — Un point matériel M de poids P est assujetti à rester sur une droite inclinée AB ; il est en outre soumis à deux forces hori-

zontales MF et MH, toutes deux situées dans le plan vertical qui passe par AB; ces deux forces MF et MH sont opposées l'une à l'autre et proportionnelles aux distances MA et MB. On donne $AB = d$, et $\widehat{BAX} = \alpha$. Trouver la distance MA pour qu'il y ait équilibre. L'équilibre est-il stable? Quelle est la pression exercée sur AB?

Si on suppose en outre que $\frac{P}{d} = \frac{MF}{MA} = m$, entre quelles limites α doit-il être compris pour que le problème soit possible?

(*Journal de Vuibert*, Paris, Nony, 1895.)

26. — Positions d'équilibre d'un point pesant assujetti à décrire une circonférence verticale et attiré proportionnellement à la distance par un point donné du diamètre horizontal. Réaction de la circonférence. — Stabilité.

27. — Déterminer l'inclinaison à donner à un plan incliné pour qu'un corps de poids P y soit en équilibre sous l'action de trois forces égales au 1/3 de son poids et agissant l'une verticalement, l'autre horizontalement et la troisième parallèlement au plan incliné.

28. — On donne dans un plan vertical une demi-circonférence dont le diamètre MN est horizontal. Un point matériel A de poids P assujetti à rester sur cette courbe est attaché à un fil qui passe sur une poulie très petite M, retombe verticalement et supporte un poids Q. Déterminer la position d'équilibre du point A et calculer la réaction de la circonférence.

29. — Un fil métallique parfaitement rigide et fixe, courbé suivant une circonférence dont le plan est vertical, passe à travers un anneau très petit M. A cet anneau sont attachés deux fils dont l'un supporte un poids Q; l'autre passe par une ouverture pratiquée dans le cercle à l'une des extrémités A du diamètre horizontal AOA'; il peut glisser sans frottement sur ce point et supporte un poids P. 1° Calculer l'angle AOM pour l'équilibre; 2° discuter les solutions trouvées.

30. — La boule d'un pendule électrique est sollicitée par un point matériel A électrisé et situé sur l'horizontale OA passant par le point de suspension O du pendule. Déterminer la position d'équilibre. Discussion.

CHAPITRE III

FORCES PARALLÈLES. — BARYCENTRES

---

36. *Composition.* — Étant données des forces parallèles en nombre quelconque, de même sens ou non, deux cas se présentent dans la composition de ces forces : 1° la résultante des forces dirigées dans un sens et celle des forces dirigées en sens contraire ont même intensité et le système des forces parallèles se réduit à un *couple;* 2° ces résultantes partielles sont inégales, on peut alors les composer et le système admet une résultante. L'intensité de cette résultante est donnée par

$$R = \Sigma F_i,$$

Σ représentant une somme algébrique.

Quant au centre C des forces parallèles, en appliquant le théorème des moments par rapport aux plans coordonnés on obtient pour ses coordonnées

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}, \\ \eta &= \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}, \\ \zeta &= \frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i}. \end{aligned} \right.$$

Ce point C porte aussi le nom de *barycentre* ou de *centre des distances proportionnelles* des points d'application $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ affectés respectivement des coefficients algébriques $F_1, F_2, \ldots\ldots, F_n$.

Lorsque les forces sont égales et de même sens les formules (1) se simplifient et deviennent :

$$\xi' = \frac{\Sigma x_i}{n},$$

$$\eta' = \frac{\Sigma y_i}{n},$$

$$\zeta' = \frac{\Sigma z_i}{n}.$$

Le centre des forces coïncide alors avec le *centre des moyennes distances* des points d'application. Ses coordonnées sont les moyennes arithmétiques des coordonnées de même nom des points d'application des forces données.

37. *Décomposition.* — Une force étant donnée, on peut se proposer de la décomposer en n forces parallèles et appliquées à des points donnés. Pour traiter cette question simplement, rapportons l'espace à trois axes rectangulaires, l'origine étant choisie sur la direction de la force donnée R, et soient $F_1, F_2 \ldots, F_n$ les composantes appliquées aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, nous aurons

$$\begin{aligned} \Sigma F_i &= R; \\ \Sigma F_i x_i &= R\xi, \\ \Sigma F_i y_i &= R\eta, \\ \Sigma F_i z_i &= R\zeta; \end{aligned}$$

mais le point d'application de R étant quelconque sur sa direction, nous avons

$$\frac{\xi}{R_x} = \frac{\eta}{R_y} = \frac{\zeta}{R_z} = \lambda,$$

λ étant un paramètre variable. Il viendra donc

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma F_i &= R, \\ \Sigma F_i x_i &= \lambda R . R_x, \\ \Sigma F_i y_i &= \lambda R . R_y, \\ \Sigma F_i z_i &= \lambda R . R_z. \end{aligned} \right.$$

Nous avons par suite 4 équations pour les $n+1$ inconnues: $F_1, F_2, \ldots, F_n, \lambda$; par conséquent le problème sera indéterminé pour $n > 3$.

Pour $n = 3$, il admettra en général une solution et une seule; et pour $n < 3$, il sera généralement impossible.

Nous dégagerons de cette discussion le cas le plus intéressant en disant : *On peut en général décomposer une force donnée en trois autres parallèles appliquées aux sommets d'un triangle et cette décomposition est unique.*

Nous rappellerons enfin ce résultat bien connu et relatif à cet énoncé; soit ABC le triangle des points d'application des composantes et O la trace de R sur ce plan, les trois composantes sont proportionnelles aux aires des triangles OBC, OCA, OAB.

38. *Conditions d'équilibre.* — Soit r la résultante des forces dirigées dans un sens, appliquée au centre A de ces forces et r' la résultante des forces dirigées en sens contraire, appliquée en A'.

Pour qu'il y ait équilibre il faut que r et r' soient égales et directement opposées; alors deux cas se présentent :

1° A et A' sont distincts.

Il faudra que AA' soit parallèle à la direction commune des forces et que l'on ait en outre $r + r' = 0$, c'est-à-dire $\Sigma F_i = 0$.

Les forces sont, sous ces conditions, en équilibre *statique*, car si on modifie leurs directions, r et r' forment un couple et il n'y a plus équilibre.

2° A et A' coïncident.

Soient x, y, z les coordonnées de A, x', y', z' celles de A' ; F_1, F_2, ... les forces ayant pour centre A et F'_1, F'_2, ... celles qui ont pour centre A', nous aurons

$$x = \frac{\Sigma F_1 x_1}{\Sigma F_1}, \qquad y = \frac{\Sigma F_1 y_1}{\Sigma F_1}, \qquad z = \frac{\Sigma F_1 z_1}{\Sigma F_1};$$

et

$$x' = \frac{\Sigma F'_1 x'_1}{\Sigma F'_1}, \qquad y' = \frac{\Sigma F'_1 y'_1}{\Sigma F'_1}, \qquad z' = \frac{\Sigma F'_1 z'_1}{\Sigma F'_1}.$$

Puisque A et A' coïncident ils ont mêmes coordonnées, c'est-à-dire que l'on a, en tenant compte des relations $\Sigma F_1 = r$, $\Sigma F'_1 = r'$, $r = r'$:

$$\Sigma F_1 x_1 - \Sigma F'_1 x'_1 = \Sigma F_i x_i = 0,$$
$$\Sigma F_1 y_1 - \Sigma F'_1 y'_1 = \Sigma F_i y_i = 0,$$
$$\Sigma F_1 z_1 - \Sigma F'_1 z'_1 = \Sigma F_i z_i = 0.$$

Les conditions d'équilibre seront donc

$$\Sigma F_i = 0 ; \qquad \Sigma F_i x_i = 0, \qquad \Sigma F_i y_i = 0, \qquad \Sigma F_i z_i = 0.$$

Cet équilibre est dit *astatique*, car il existe quelle que soit la direction des forces.

Remarque. — La condition unique : $\Sigma F_i = 0$, exprime que le système se réduit à un couple.

39. *Trois forces parallèles d'intensités*, 1, 4, 7 *sont appliquées aux trois points* A, B, C *situés en ligne droite et tels que* $AB = BC = l$; *la troisième est de sens contraire aux deux autres. Déterminer la position* I *du centre de ces trois forces.*

Appliquons le théorème des moments par rapport au point A, il viendra

$$4AB - 7AC = -2AI,$$

ou bien

$$4l - 14l = -2AI,$$

d'où

$$AI = 5l.$$

La résultante a pour intensité 2 et est dirigée dans le même sens que la composante appliquée au point C.

40. *Par un point* O *pris à l'intérieur d'un parallélogramme*

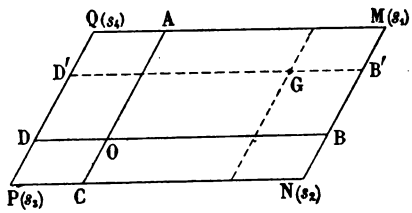
MNPQ *on trace des parallèles aux côtés, et on applique à ses sommets des poids égaux aux surfaces des parallélogrammes partiels aboutissant. Trouver le centre de ces forces.*

Soient s_1, s_2, s_3, s_4 les surfaces des quatre parallélogrammes partiels et par conséquent les poids appliqués aux sommets M, N, P, Q.

Nous avons en particulier

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\text{OAMB}}{\text{OCNB}} = \frac{\text{MB}}{\text{NB}},$$

donc la résultante $s_1 + s_2$ de ces deux forces est appliquée



au point B' tel que MB' = NB; de même le centre des forces appliquées aux sommets P et Q sera en D' tel que QD' = PD.

Le centre de nos quatre forces appartiendra donc à la droite B'D' symétrique de BD par rapport au centre du parallélogramme et pareillement à la symétrique de AC par rapport à ce même point; il coïncidera par suite avec la symétrique du point O par rapport au centre du parallélogramme.

41. *On considère deux forces parallèles et de grandeurs données* F_1, F_2. *Sachant que le point d'application* A_1 *de la première est fixe et que celui de la seconde décrit une courbe fixe* (C), *trouver le lieu que décrit leur centre* B.

F_1 et F_2 représentant les intensités des forces et étant affectées de signes indiquant leur sens, on aura

$$\frac{A_1B}{F_2} = \frac{A_1A_2}{F_1 + F_2},$$

d'où

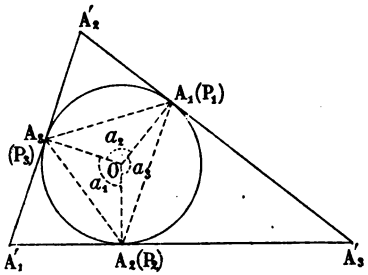
$$\frac{A_1B}{A_1A_2} = \frac{F_2}{F_1 + F_2}.$$

Le lieu du centre B est donc une courbe homothétique à (C), le centre d'homothétie étant A_1 et le rapport $\frac{F_2}{F_1 + F_2}$.

L'homothétie sera inverse si les deux forces étant de sens contraire la force F_1 a la plus grande intensité; elle sera directe dans les autres cas.

42. *Trois poids* P_1, P_2, P_3 *sont appliqués à trois points inconnus d'une circonférence. Déterminer ces points de façon que leur barycentre coïncide avec le centre de la circonférence.*

Soient A_1, A_2, A_3 les positions cherchées, nous aurons



$$\frac{\text{surf. } A_2OA_3}{P_1} = \frac{\text{surf. } A_3OA_1}{P_2} = \frac{\text{surf. } A_1OA_2}{P_3},$$

ou

$$\frac{\sin a_1}{P_1} = \frac{\sin a_2}{P_2} = \frac{\sin a_3}{P_3}.$$

Or, construisons le triangle $A'_1A'_2A'_3$ circonscrit à la circonference, les points de contact étant A_1, A_2, A_3, les relations précédentes s'écriront

$$\frac{\sin A'_1}{P_1} = \frac{\sin A'_2}{P_2} = \frac{\sin A'_3}{P_3}.$$

Par conséquent ce triangle est semblable à celui qui a pour côtés P_1, P_2, P_3; nous construirons donc ce dernier n'importe où dans le plan de la figure et les rayons menés perpendiculairement à ses côtés couperont la circonférence en 6 points, parmi lesquels il sera facile de choisir A_1, A_2, A_3 formant un triangle renfermant le centre O. Pour que le problème soit possible il faut et

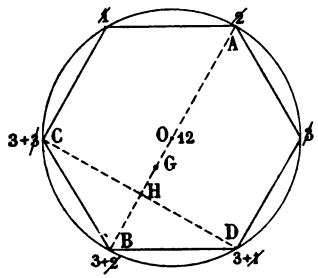
il suffit évidemment que chacun des poids soit inférieur ou au plus égal à la somme des deux autres ; effectivement on pourra alors construire le triangle auxiliaire ayant pour côtés P_1, P_2, P_3.

43. *Aux sommets d'un hexagone régulier on applique des poids exprimés en kilos par les nombres :* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Trouver leur barycentre.*

(*Bacc. ès sciences, Bordeaux, 1892.*)

Remplaçons les poids 4, 5 et 6 par $3+1$, $3+2$, $3+3$ et composons les poids 1 appliqués aux extrémités d'un même diamètre, de même les poids 2 et ensuite les poids 3.

Nous aurons après ces opérations le poids 12 appliqué au centre O de l'hexagone et les poids 3 appliqués en C, B et D.



Le barycentre G appartiendra donc au rayon OB et le théorème des moments nous donnera ensuite, O étant le centre des moments,

$$3.OB + 6.OH = 21.OG\,;$$

mais $OB = R$, $OH = \frac{R}{2}$, et il viendra finalement

$$OG = \frac{2}{7}\,R.$$

On eût pu d'ailleurs, sans procéder préalablement à une composition partielle des poids, prendre immédiatement les moments par rapport au point O, mais en remarquant d'abord que le centre de ces poids est situé sur le diamètre AB.

44. *Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le barycentre des centres des cercles inscrit et exinscrits.*

(Laisant.)

Soit le triangle ABC, supposons que des poids égaux, 1, soient appliqués aux centres des cercles inscrit et exinscrits et proposons-nous de trouver le centre G de ces poids.

Pour cela, appliquons le théorème des moments par rapport au sommet B en supposant les forces de direction perpendiculaire à BC, il viendra, α étant la distance de B à la résultante,

$$4\alpha = p - b + p + p - c - p + a,$$

d'où

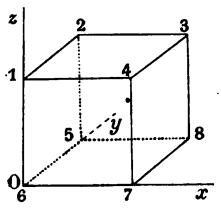
$$\alpha = \frac{a}{2}.$$

Le point G appartient donc à la perpendiculaire menée à BC en son milieu ; et plus généralement par symétrie à chacune des perpendiculaires aux côtés du triangle en leur milieu.

G est donc bien le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

45. *Étant donné un cube, on applique aux sommets d'une face les poids* 1, 2, 3, 4 *et à ceux de la face opposée les poids* 5, 6, 7, 8 *de façon que les poids appliqués aux extrémités de chacune des diagonales du solide aient pour somme* 9. *Déterminer le centre de ces poids.*

Rapportons le cube aux trois arêtes Ox, Oy, Oz et soient x, y, z les coordonnées du barycentre cherché, nous aurons, en partant des formules



$$x = \frac{\Sigma F_1 x_1}{\Sigma F_1}, \quad y = \frac{\Sigma F_1 y_1}{\Sigma F_1}, \quad z = \frac{\Sigma F_1 z_1}{\Sigma F_1},$$

$$x = \frac{11}{18}a, \quad y = \frac{1}{2}a, \quad z = \frac{5}{18}a,$$

a étant l'arête du cube.

46. *Centre de quatre poids appliqués aux sommets d'un tétraèdre et proportionnels aux aires des faces opposées.*

Soient a, b, c, d les aires des faces et V le volume du tétraèdre, h_A, h_B, ... ses hauteurs. Prenons les moments par rapport au plan BCD et désignons par α la distance du barycentre à ce plan, il viendra

$$ah_A = (a + b + c + d)\alpha,$$

d'où

$$\alpha = \frac{ah_A}{a+b+c+d},$$

ou bien encore

$$\alpha = \frac{3V}{a+b+c+d}.$$

La symétrie du second membre nous montre que l'on trouverait la même expression pour β, γ, δ; donc le barycentre étant équidistant des quatre faces coïncide avec le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Le rayon de cette sphère est précisément $\frac{3V}{a+b+c+d}$.

En changeant les signes d'un ou de deux de ces poids, on obtiendrait comme barycentres les centres des sphères exinscrites et on trouverait en même temps l'expression de leurs rayons.

47. *Étant donné un triangle solide* ABC, *déterminer les intensités de trois forces parallèles, appliquées aux sommets et ayant pour centre : 1° le point de concours des médianes ; 2° le centre du cercle inscrit ; 3° le centre du cercle circonscrit.*

1° Soient α, β, γ les intensités cherchées et O le point de concours des médianes, nous savons que l'on a

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\text{surf. OBC}} = \frac{\beta}{\text{surf. OCA}} = \frac{\gamma}{\text{surf. OAB}};$$

mais les triangles OBC, OCA, OAB sont équivalents et il viendra

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Par conséquent, il faut appliquer aux sommets du triangle trois forces d'égale intensité.

2° Conservons les mêmes notations, et soit r le rayon de la circonférence inscrite, nous aurons alors

$$\text{surf. OBC} = \frac{1}{2}ar, \qquad \text{surf. OCA} = \frac{1}{2}br,$$

$$\text{surf. OAB} = \frac{1}{2}cr.$$

Il viendra par suite en remplaçant dans (1) et simplifiant

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Les forces sont donc proportionnelles aux côtés opposés à leurs points d'application. Si O était le centre d'un cercle exinscrit, on trouverait les mêmes intensités, mais l'une des forces serait de sens contraire aux deux autres.

3° Dans ce cas, en appelant R le rayon de la circonférence circonscrite, nous obtiendrons

$$\text{surf. OBC} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A, \qquad \text{surf. OCA} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2B,$$

$$\text{surf. OAB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2C,$$

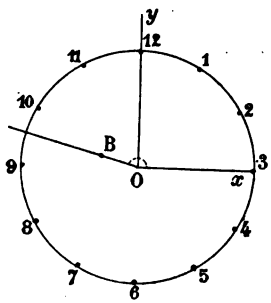
d'où en remplaçant dans (1)

$$\frac{\alpha}{\sin 2A} = \frac{\beta}{\sin 2B} = \frac{\gamma}{\sin 2C}.$$

Quand le centre O de la circonférence est situé à l'intérieur du triangle les trois forces parallèles sont de même sens, dans le cas contraire l'une est de sens opposé à celui des deux autres.

48. *Barycentre d'un cadran d'horloge.*

Nous nous proposons de trouver le centre B des poids: 1, 2,..., 12 appliqués aux sommets d'un dodécagone régulier convexe ; pour cela, nous rapporterons le cadran aux axes rectangulaires Ox, Oy, l'un passant par 9 — 3, l'autre par 6 — 12.



Le barycentre aura alors pour coordonnées

$$x = \frac{\Sigma F_1 x_1}{\Sigma F_1}, \qquad y = \frac{\Sigma F_1 y_1}{\Sigma F_1}.$$

Pour calculer les seconds membres, nous formerons le tableau suivant où figurent en regard des poids les coordonnées de leurs points d'application et nous prendrons comme unité de longueur le rayon du cadran.

Poids . . .	x	y
1. . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. . .	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
3. . .	1	0
4. . .	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
5. . .	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. . .	0	-1
7. . .	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. . .	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
9. . .	-1	0
10. . .	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
11. . .	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
12. . .	0	1.

Il viendra alors après simplification et en remarquant que $\Sigma F_1 = 78$,

$$x = -\frac{2+\sqrt{3}}{13},$$

$$y = \frac{1}{13}.$$

De ces formules nous tirons

$$\operatorname{tg} \widehat{BOx} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \qquad \text{d'où} \qquad \widehat{BOx} = 165^\circ,$$

OB passe donc par 9 heures $\frac{1}{2}$.

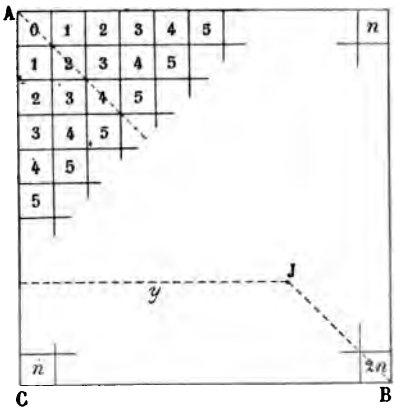
En outre $\qquad \overline{OB}^2 = x^2 + y^2 = \frac{8+4\sqrt{3}}{13^2},$

d'où

$$OB = \frac{2}{13}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

49. *Barycentre d'une table d'addition.*

Dans la table d'addition ci-jointe, nous supposons les carrés homogènes et de poids représentés par les chiffres qu'ils contiennent et appliqués à leurs centres. Ces poids étant symétriquement distribués par rapport à la diagonale AB, le barycentre J appartient à cette droite.



J sera donc connu en même temps que sa distance y au côté AC.

Pour déterminer y, nous appliquerons le théorème des moments par rapport au plan mené par AC perpendiculairement au plan de la figure.

Appelons a la longueur du côté des cases et M_0, M_1, ..., M_n les moments des poids contenus dans chacune des lignes, nous aurons, en posant

$$S_1 = 1 + 2 + \ldots + n; \qquad S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2,$$

$$M_0 = \frac{a}{2}(2S_2 + S_1),$$

$$M_1 = \frac{a}{2}(2S_2 + S_1) + \frac{a}{2}(n+1)^2,$$

$$M_2 = \frac{a}{2}(2S_2 + S_1) + 2\frac{a}{2}(n+1)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_n = \frac{a}{2}(2S_2 + S_1) + n\frac{a}{2}(n+1)^2.$$

Donc la somme des moments de tous les poids s'écrit

$$\Sigma M_i = \frac{a}{2}(n+1)(2S_2+S_1)+\frac{a}{2}S_1(n+1)^2.$$

Quant à la somme des poids, elle se calcule aisément en ajoutant les poids contenus dans chacune des lignes, et en remarquant que la somme qui correspond à une ligne surpasse de $n+1$ la somme correspondant à la ligne précédente.

On obtient finalement $n(n+1)^2$.

Il viendra donc

$$y = \frac{a}{2}\,\frac{2S_2+S_1+S_1(n+1)}{n(n+1)},$$

mais $\quad S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}, \qquad S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

et nous trouvons enfin

$$y = \frac{7n+8}{12}a.$$

50. Théorème de Pappus. — *Si des mobiles de même masse placés aux sommets d'un polygone partent en même temps et parcourent respectivement les côtés, en allant dans le même sens et avec des vitesses constantes proportionnelles à ces côtés, leur barycentre reste immobile.*

(*Nouvelles Annales, 1881.*)

Soit ABCD... le polygone; les vitesses des mobiles seront : kAB, kBC, kCD, ...

Au bout du temps t, le mobile (m) qui parcourt AB se trouvera en M et on aura

$$AM = kAB.t,$$

d'où $$\frac{MA}{kt} = \frac{AB}{1} = \frac{MB}{1-kt}.$$

La masse m appliquée en M pourra donc se décomposer en deux, l'une mkt appliquée en B, l'autre $m(1-kt)$ appliquée en A. En raisonnant de même pour chacun des autres mobiles, on obtiendra à chacun des sommets du polygone la masse

$$m(1-kt)+mkt = m.$$

Par conséquent à tout instant le centre des masses des mobiles coïncidera avec le centre des moyennes des distances des sommets du polygone.

Ce théorème avait été énoncé par Pappus dans le cas du triangle. Résal en 1881 l'étendit au polygone et le démontra par le calcul ; l'année suivante M. Laquière en donna la démonstration simple qui précède.

51. *Soit* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *un système de points,* B *son barycentre. A chaque point de ce système on fait correspondre le barycentre de tous les autres. Démontrer que la figure formée par ces barycentres est homothétique inverse à la figure formée par les points donnés.*

(Bellavitis.)

Soit B le barycentre des n points et appelons $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les barycentres des systèmes que l'on obtient en faisant alternativement abstraction de l'un des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Considérons par exemple le système : $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ qui a pour barycentre B_n ; B est le centre de deux poids l'un, 1 appliqué en A_n, l'autre, $n-1$ appliqué en B_n, nous aurons donc

$$\frac{BA_n}{n-1} = -\frac{BB_n}{1},$$

d'où

$$\frac{BA_n}{BB_n} = -(n-1).$$

Par conséquent la figure $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est homothétique inverse à la figure $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$. Le centre d'homothétie est B et le rapport d'homothétie est égal à $n-1$.

52. Théorème de Leibniz. — *Étant donné un système de forces parallèles* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *appliquées aux points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$*;* C *étant leur centre et* M *un point quelconque les forces dirigées suivant les droites* $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$ *et d'intensités algébriques* $MA_1.F_1, MA_2.F_2, \ldots$ ($F_1, F_2, \ldots$ *étant les intensités algé-*

briques des forces données) ont leur résultante dirigée suivant MC *et d'intensité algébrique* $MC(F_1 + F_2 + \ldots)$.

Rapportons l'espace à trois axes rectangulaires Mx, My, Mz et appliquons le théorème des moments par rapport aux trois plans coordonnés ; il viendra, F_1, F_2,, F_3 ... étant les intensités des forces parallèles, affectées de signes dépendant de leur sens et les moments étant pris par rapport au plan Myz,

$$F_1 . \text{proj}_{ox} . \overline{MA_1} + F_2 . \text{proj}_{ox} . \overline{MA_2} + \cdots = (F_1 + F_2 + \cdots) \text{proj}_{ox} . \overline{MC},$$

ou bien

$$\text{proj}_{ox} . (F_1 . \overline{MA_1}) + \text{proj}_{ox} . (F_2 . \overline{MA_2}) + \cdots = \text{proj}_{ox} . [(F_1 + F_2 + \cdots) . \overline{MC}].$$

Par conséquent le segment $(F_1 + F_n + \ldots)\ \overline{MC}$ ayant pour projection sur chacun des axes la somme des projections des segments $F_1 . \overline{MA_1}$, ... est le segment résultant de ceux-ci.

Remarque. — Le point M sera en équilibre quand il coïncidera avec le centre C des forces parallèles.

Le théorème et cette remarque donnent une autre solution du problème suivant :

Trouver la position d'équilibre d'un point M *attiré ou repoussé par des points fixes* A_1, A_2, ... *proportionnellement aux distances.*

53. *Le centre d'un système de poids égaux aux côtés d'un polygône circonscrit à un cercle et appliqués respectivement aux points de contact de ces côtés est le centre du cercle.*

(*Nouvelles Annales, 1862.*)

Soient O le centre du cercle de rayon R, a, b, c, d, ... les longueurs des côtés du polygone et A, B, C, ... les points où ils touchent le cercle.

Considérons les forces dirigées suivant OA, OB, OC, ... et d'intensités respectives Ra, Rb, Rc, ... elles se font équilibre ; en effet, si l'on fait tourner de 90° autour du point O le polygone donné et que l'on construise le polygone semblable avec R comme rapport de similitude, on obtient précisément le polygone des forces. Ce polygone étant fermé, les forces considé-

rées sont en équilibre, et d'après le théorème de Leibniz, O est le centre des forces parallèles (a), (b), (c), ... appliquées aux points A, B, C,...

54. Théorème des transversales. — *Toute transversale détermine sur les côtés d'un triangle* ABC *six segments vérifiant la relation*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Soit un point ϖ appliqué en A'; on sait qu'on peut le décomposer en deux de même signe ou non, β, γ appliqués respectivement en B et C, on a d'ailleurs

$$(1) \qquad \frac{A'B}{\gamma} = -\frac{A'C}{\beta}.$$

Ceci posé, appliquons en A les poids α et $-\alpha$, le système $(\beta, \gamma, \alpha, -\alpha)$ est équivalent à (β, γ) ou à ϖ ; et déterminons α par la relation

$$(2) \qquad \frac{C'A}{\beta} = -\frac{C'B}{\alpha}.$$

En composant β, γ, α, $-\alpha$, on obtiendra $\beta + \alpha$ appliqué en C', γ en C et $-\alpha$ en A ; or le centre de ces forces étant A', le centre de $-\alpha$ et γ coïncidera avec B', nous aurons donc

$$(3) \qquad \frac{B'C}{-\alpha} = -\frac{B'A}{\gamma}.$$

Éliminons α, β, γ entre (1), (2), (3) nous obtiendrons bien la relation de Ménélaüs :

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

On établirait sans plus de difficulté la réciproque.

55. Théorème de Céva. — *On joint les sommets d'un triangle* ABC *à un point* O *quelconque de son plan, si* A', B', C' *sont les*

intersections de ces droites avec les côtés opposés du triangle, on a la relation

$$(1) \qquad \frac{AB'}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = -1.$$

Plaçons un poids ϖ au point O et décomposons ce poids en trois autres α, β, γ (affectés de signe) appliqués aux sommets du triangle. On sait que ceci est possible et d'une seule manière. Pour cela, décomposons d'abord ϖ en α et α' appliqués en A et A', nous aurons

$$(2) \qquad \frac{OA'}{\alpha} = -\frac{OA}{\alpha'} = \frac{AA'}{\varpi},$$

puis décomposons α' en β et γ appliqués aux sommets B et C, il viendra

$$(3) \qquad \frac{A'B}{\gamma} = -\frac{A'C}{\beta} = \frac{BC}{\alpha'}.$$

En décomposant autrement ϖ, nous aurions deux relations analogues à (2) et pareillement deux systèmes analogues à (3), écrivons-les

$$(2)' \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{OB'}{\beta} &= -\frac{OB}{\beta'} = \frac{BB'}{\varpi}, \\ \frac{OC'}{\gamma} &= -\frac{OC}{\gamma'} = \frac{CC'}{\varpi}; \end{aligned} \right.$$

et

$$(3)' \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{B'C}{\alpha} &= -\frac{B'A}{\gamma} = \frac{AC}{\beta'}, \\ \frac{C'A}{\beta} &= -\frac{C'B}{\alpha} = \frac{BA}{\gamma'}. \end{aligned} \right.$$

Ceci posé, nous déduirons de (3) et (3)'

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{\gamma}{\beta}, \qquad \frac{B'C}{B'A} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{C'A}{C'B} = -\frac{\beta}{\alpha};$$

d'où

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1;$$

telle est la relation de Céva, qu'il fallait établir.

La considération des relations (2) et (2)' nous conduit aussi à

une relation géométrique intéressante. Nous avons en effet

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{\alpha}{\varpi}, \qquad \frac{OB'}{BB'} = \frac{\beta}{\varpi}, \qquad \frac{OC'}{CC'} = \frac{\gamma}{\varpi};$$

on a $\varpi = \alpha + \beta + \gamma$, donc il viendra

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

Réciproquement, *si trois points* A′, B′, C′ *appartenant respectivement aux côtés* BC, AC, AB *du triangle* ABC *sont choisis de façon que la relation*

$$(1) \qquad \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = -1$$

soit vérifiée, les droites AA′, BB′, CC′ *sont concourantes.*

En effet, posons

$$\frac{C'A}{C'B} = -\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{A'B}{A'C} = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

(1) nous donnera

$$\frac{B'C}{B'A} = -\frac{\alpha}{\gamma},$$

α, β, γ étant des quantités comportant un signe.

Appliquons au sommet du triangle des forces parallèles représentées en intensité et sens par α, β, γ, puis composons ces trois forces.

Le centre de α et β partagera le côté AB dans le rapport $-\frac{\beta}{\alpha}$, il coïncidera donc avec C′, de sorte que le centre de α, β, γ appartiendra à CC′; en opérant autrement, on verrait de même qu'il est situé sur AA′ et BB′, donc AA′, BB′, CC′ sont concourantes au barycentre de A, B, C affectés des coefficients α, β, γ.

56. *Étant donnés n points matériels* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de poids* p_1, $p_2, \ldots, p_n$, *si* G *est leur barycentre et* M *un point quelconque de l'espace, on a la relation*

$$p_1 \cdot \overline{MA_1}^2 + p_2 \cdot \overline{MA_2}^2 + \ldots + p_n \overline{MA_n}^2$$
$$= p_1 \overline{GA_1}^2 + p_2 \overline{GA_2}^2 + \ldots + p_n \overline{GA_n}^2 + (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \overline{MG}^2.$$

Rapportons l'espace à trois axes de coordonnées rectangulaires ayant pour origine le barycentre G; et soient (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), ... (x_n, y_n, z_n) les coordonnées des points M, A_1, ..., A_n.

Nous avons

$$\overline{MA_1}^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1;$$

mais

$$x^2 + y^2 + z^2 = \overline{MG}^2, \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \overline{GA_1}^2;$$

par conséquent il viendra

$$\begin{aligned}
\overline{MA_1}^2 &= \overline{MG}^2 + \overline{GA_1}^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1),\\
\overline{MA_2}^2 &= \overline{MG}^2 + \overline{GA_2}^2 - 2(xx_2 + yy_2 + zz_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overline{MA_n}^2 &= \overline{MG}^2 + \overline{GA_n}^2 - 2(xx_n + yy_n + zz_n).
\end{aligned}$$

Multiplions chacune de ces relations par $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et additionnons, nous aurons

$$\Sigma p_1\overline{MA_1}^2 = \overline{MG}^2\Sigma p_1 + \Sigma p_1\,\overline{GA_1}^2 - 2x\Sigma p_1x_1 - 2y\Sigma p_1y_1 - 2z\Sigma p_1z_1.$$

Or, le barycentre G étant l'origine des coordonnées, les trois quantités Σp_1x_1, Σp_1y_1, Σp_1z_1 sont nulles et il vient finalement

$$\Sigma p_1\overline{MA_1}^2 = \overline{MG}^2\Sigma p_1 + \Sigma p_1\overline{GA_1}^2.$$

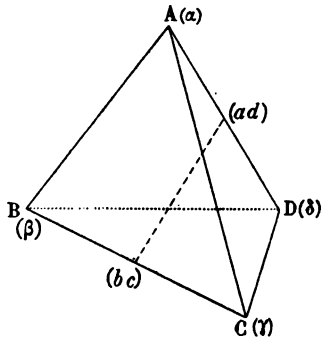
COROLLAIRE I. — *Le lieu géométrique des points* M *tels que la somme* $\Sigma p_1\overline{MA_1}^2$, *des carrés de leurs distances à n points donnés, multipliées respectivement par les facteurs* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *est constante, est une surface sphérique ayant pour centre le barycentre des n points donnés.*

COROLLAIRE II. — *Le minimum de* $\Sigma p_1\overline{MA}^2$ *a lieu quand on a* $MG = 0$, *c'est-à-dire quand le point* M *coïncide avec* G.

57. *Décomposer un poids* P *placé en un point donné* O *en quatre poids appliqués respectivement aux sommets d'un tétraèdre* ABCD.

Soient α, β, γ, δ les poids composants (affectés de signe) et appliqués aux sommets du tétraèdre.

Pour calculer ces quantités, nous prendrons les moments par rapport à chacune des faces du solide; ainsi, si nous désignons par δ_A, δ_B, δ_C, δ_D les distances de O aux faces, il viendra en prenant les moments par rapport au plan BCD



$$\alpha h_A = P.\delta_A,$$

d'où $$\frac{\alpha}{\delta_A} = \frac{P}{h_A},$$

ou bien encore

$$\frac{\alpha}{\text{vol. OBCD}} = \frac{P}{\text{vol. ABCD}};$$

nous obtiendrions des relations analogues en prenant les moments par rapport aux autres faces, et en réunissant, il viendra

$$\frac{\alpha}{\text{vol. OBCD}} = \frac{\beta}{\text{vol. OACD}} = \frac{\gamma}{\text{vol. OABD}} = \frac{\delta}{\text{vol. OABC}} = \frac{P}{\text{vol. ABCD}}.$$

Telles sont les formules qui donnent α, β, γ, δ. On remarquera l'analogie de ce résultat avec celui que l'on trouve, lorsque l'on décompose une force en trois autres parallèles appliquées aux sommets d'un triangle.

Remarque. — Réciproquement, si l'on compose α, β, γ et δ on trouvera le poids P appliqué au barycentre O. La composition de ces forces va nous conduire à un résultat géométrique intéressant et présentant quelque utilité, au point de vue des applications.

Composons α et δ, le centre de ces poids sera situé sur AD en un point que nous appellerons (ad), on aura d'ailleurs

$$\frac{(ad)A}{(ad)D} = -\frac{\delta}{\alpha};$$

composons maintenant β et γ nous aurons le poids $\beta + \gamma$ ap-

pliqué en (bc) et défini par

$$\frac{(bc)B}{(bc)C} = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

Le centre O des quatre forces appartiendra donc à la droite $(ad)(bc)$, ou bien encore aux plans $AD(bc)$ et $BC(ad)$ et en procédant autrement pour la composition des forces on obtiendra quatre autres plans qui formeront avec les deux précédents un système de six plans concourant au point O.

Nous avons d'ailleurs les relations

$$(1)\ \frac{(ab)B}{(ab)A} = -\frac{\alpha}{\beta},\quad (2)\ \frac{(bc)C}{(bc)B} = -\frac{\beta}{\gamma},\quad (3)\ \frac{(cd)D}{(cd)C} = -\frac{\gamma}{\delta},$$

$$(4)\ \frac{(da)A}{(da)D} = -\frac{\delta}{\alpha},\quad (5)\ \frac{(bd)B}{(bd)D} = -\frac{\delta}{\beta},\quad (6)\ \frac{(ac)C}{(ac)A} = -\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Eliminons α, β, γ, δ entre (1), (2), (3) et (4), puis entre (1), (5), (3) et (6), puis enfin entre (4), (5), (2) et (6) il viendra

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (ab)B.(bc)C.(cd)D.(da)A = (ab)A.(bc)B.(cd)C.(da)D, \\ (ab)B.(bd)D.(cd)C.(ac)A = (ab)A.(bd)B.(cd)D.(ac)C, \\ (da)A.(bd)D.(bc)B.(ac)C = (da)D.(bd)B.(bc)C.(ac)A. \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque six plans passant respectivement par les arêtes d'un tétraèdre sont concourants, ils déterminent sur les arêtes 12 segments vérifiant les trois relations précédentes.

Ces relations s'interprètent aisément. Considérons en effet les trois quadrilatères gauches ABCD, ABDC, ADBC qui ont pour sommets ceux du tétraèdre.

Les relations (I) expriment que pour chacun de ces quadrilatères, le produit de quatre segments non consécutifs déterminés sur ses côtés est égal au produit des quatre autres. *Réciproquement*, si ces relations sont vérifiées, les six plans $AD(bc)$, $BC(ad)$, ... sont concourants. En effet, on peut alors trouver α, β, γ, δ vérifiant (1), (2) ..., (6) et les six plans précédents contiennent tous le point O.

Les conditions (I) expriment aussi que les trois droites $(ab)(cd)$, $(ac)(bd)$, $(ad)(bc)$ sont concourantes. Nous allons donner

les trois relations que vérifient les segments de ces droites limités soit aux arêtes du tétraèdre soit à leur point de concours O.

Nous avons

$$\frac{O(ab)}{\gamma+\delta}=\frac{O(cd)}{\alpha+\beta}=\frac{(ab)(cd)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},$$

$$\frac{O(ac)}{\beta+\delta}=\frac{O(bd)}{\alpha+\gamma}=\frac{(ac)(bd)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},$$

$$\frac{O(ad)}{\beta+\gamma}=\frac{O(bc)}{\alpha+\delta}=\frac{(ad)(bc)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

Éliminons α, β, γ et δ, il viendra

$$\frac{O(cd)}{(ab)(cd)}+\frac{O(bc)}{(ad)(ba)}+\frac{O(ac)}{(ac)(bd)}=2,$$

$$\frac{O(ad)}{(bc)(ad)}+\frac{O(ab)}{(ab)(cd)}+\frac{O(ac)}{(ac)(bd)}=2,$$

$$\frac{O(cd)}{(ab)(cd)}+\frac{O(ad)}{(ad)(bc)}+\frac{O(bd)}{(ac)(bd)}=2,$$

$$\frac{O(ab)}{(ab)(cd)}+\frac{O(bc)}{(ad)(bc)}+\frac{O(bd)}{(ac)(bd)}=2.$$

Trois de ces relations seulement sont distinctes ; en effet, si on les ajoute membre à membre on trouve une identité.

EXERCICES

31. — Aux trois sommets d'un triangle équilatéral sont appliquées trois forces parallèles et de même sens, ayant pour intensités 1, 2, 3. Résultante de ces forces ? Examiner le cas où la force d'intensité 3 est de sens contraire aux deux autres.

(Bacc. ès sciences, Clermont.)

32. — Trouver en quel point, il faut soutenir un hexagone régulier horizontal supportant des poids égaux à cinq de ses sommets.

(Dipl. ens. spécial, Besançon, 1880.)

33. — Aux trois sommets B, C, D d'un tétraèdre ABCD sont appliquées trois forces P, Q, R. Déterminer la distance du centre de ces forces au sommet A.

34. — Quatre points A, B, C, O étant donnés sur une droite, on applique aux trois premiers des forces parallèles d'intensités : x^2, x, 1. Calculer x pour que le centre de ces forces coïncide avec le point O.

35. — Aux sommets B et C des angles égaux d'un triangle isocèle ABC on applique des forces parallèles de même intensité P, et l'on demande d'exprimer en fonction de P et de l'angle A, l'intensité Q de la force qu'il faut appliquer en A parallèlement aux deux autres pour que la résultante des trois forces considérées passe par le point de concours des hauteurs du triangle. Pour quelle valeur de $\widehat{A}$ a-t-on $P = Q$?

(Bacc. ès sciences, Dijon, 1892.)

36. — A trois sommets d'un parallélogramme on applique trois forces F parallèles, égales et de même sens et au quatrième sommet une force F parallèle et égale aux premières mais de sens contraire. — Déterminer le centre de ces quatre forces.

37. — Quels poids faut-il appliquer aux sommets d'un triangle pour que leur barycentre appartienne à la droite qui joint le centre du cercle inscrit au point de concours des médianes ?

38. — On divise un parallélépipède en huit parties par des plans parallèles aux faces menés par un point intérieur au solide, et on applique à chacun des sommets des poids proportionnels aux volumes des parallélépipèdes aboutissants. Déterminer le centre de ces forces.

39. — Barycentre d'une table de multiplication.

40. — On donne un parallélogramme ; au centre de la figure est appliquée une force F. Décomposer cette force en trois autres parallèles égales appliquées l'une en un sommet, les deux autres quelque part sur le périmètre.

41. — Etant donnés un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et un point O, on applique aux n premiers des poids $\frac{k}{OA_1}, \frac{k}{OA_2}, \ldots, \frac{k}{OA_n}$. Trouver le centre de ces poids.

42. — Aux sommets A, B, C d'un triangle, on applique des poids : 1, 2, 3, puis 2, 3, 1, puis 3, 1, 2. Soient G_1, G_2, G_3 les trois barycentres.

Démontrer : 1° que les triangles ABC et $G_1G_2G_3$ ont le même barycentre G ; 2° que les médianes de chacun de ces deux triangles sont parallèles aux côtés de l'autre.

(LAISANT.)

43. — Quels poids faut-il appliquer aux sommets d'un tétraèdre pour que leur centre coïncide avec le centre d'une sphère ex-inscrite au tétraèdre ?

44. — Trouver le barycentre des poids 1, 2, 3, 4 appliqués respectivement aux sommets d'un tétraèdre.

CHAPITRE IV

CENTRES DE GRAVITÉ

---

58. Les actions de la pesanteur sur chacun des points d'un système solide étant dirigées vers le centre de la terre sont sensiblement parallèles. Le centre de ces attractions parallèles et de même sens a reçu le nom de *centre de gravité* du système.

Par conséquent il sera défini comme on sait par les formules

$$x = \frac{\Sigma p_1 x_1}{\Sigma p_1}, \qquad y = \frac{\Sigma p_1 y_1}{\Sigma p_1}, \qquad z = \frac{\Sigma p_1 z_1}{\Sigma p_1},$$

$p_1, p_2, \ldots$ étant les poids des points matériels dont l'ensemble constitue le solide.

Le poids du solide est $P = \Sigma p_1$.

Les théorèmes suivants que nous rappelons, simplifient dans certains cas la recherche du centre de gravité.

Lorsqu'un solide (LIGNE, SURFACE OU VOLUME) *a un centre, un axe, ou un plan de symétrie, son centre de gravité coïncide avec ce centre, est situé sur l'axe ou appartient au plan.*

Si une SURFACE PLANE *admet un diamètre, son centre de gravité est situé sur ce diamètre.*

Lorsqu'un VOLUME *admet un plan diamétral, son centre de gravité appartient à ce plan.*

Centre de gravité des lignes.

59. *Segment rectiligne.*

Le milieu est son centre de gravité.

Contour triangulaire.

Son centre de gravité coïncide avec le centre de la circonférence inscrite au triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle donné.

Contour quadrilatère ou polygonal.

G coïncide avec le barycentre des milieux des côtés affectés de coefficients égaux à leurs longueurs.

Contour polygonal régulier.

G est défini sur le rayon de symétrie par

$$OG = \frac{\text{apothème} \times \text{corde}}{\text{contour}}.$$

Arc de circonférence.

La formule précédente donne en passant à la limite

$$OG = \frac{\text{Rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}} = \frac{Rc}{a}.$$

Dans le cas particulier de la demi-circonférence on obtient

$$OG = \frac{2R}{\pi}.$$

60. *Trouver le centre de gravité du périmètre du demi-hexagone régulier* ABCD *et du diamètre* AD *qui le ferme.*

(*Bacc. ès sciences, Paris.*)

Soit G le centre de gravité de ce trapèze, g celui du demi-hexagone et appelons R le rayon de la circonférence circonscrite c'est-à-dire la longueur AB = BC = CD. G et g appartiennent au rayon perpendiculaire à BC.

Nous avons d'ailleurs

$$Og = \frac{\text{apoth.} \times \text{corde}}{\text{cont.}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Le contour du trapèze étant la somme de celui du demi-hexagone et du diamètre, il viendra en prenant les moments par rapport au centre O

$$5R.OG = 3R.Og,$$

d'où

$$OG = \frac{3}{5}Og,$$

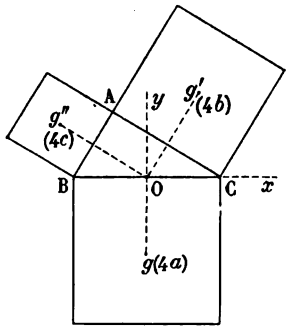
c'est-à-dire

$$OG = \frac{R\sqrt{3}}{5}.$$

61. *On construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC. *Trouver le centre de gravité des douze droites de la figure.*

(*Saint-Cyr.*)

Soient g, g', g'' les centres des carrés, en ces points sont appliqués respectivement les poids $4a$, $4b$, $4c$ de leurs périmètres. Prenons les moments par rapport aux plans perpendiculaires à celui de la figure et passant l'un par l'hypoténuse, l'autre par la perpendiculaire Oy à ce côté en son milieu, il viendra en appelant x et y les distances du centre de gravité à ces deux droites :



$$4(a+b+c)x$$
$$= 4b\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos B - 4c\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos C,$$

mais

$$b\cos B = c\cos C,$$

donc

$$x = 0\,;$$

puis

$$4(a+b+c)y = 4b\,\frac{b+c}{2}\sin B + 4c\,\frac{b+c}{2}\sin C - 2a^2,$$

ou bien, en remarquant que

$$b\sin B + c\sin C = a,$$
$$y = \frac{a(p-a)}{2p}.$$

Le centre de gravité cherché est donc situé sur Oy à la distance $\frac{a(p-a)}{2p}$ du milieu O de l'hypoténuse.

62. *Trouver le centre de gravité de trois circonférences tangentes extérieurement.*

Soient A, B, C leurs centres et a, b, c les côtés du triangle ABC. On voit aisément que les rayons des circonférences sont respectivement égaux à $p-a$, $p-b$ et $p-c$; par conséquent nous avons à chercher le barycentre des sommets A,B,C affectés des coefficients $2\pi(p-a)$, $2\pi(p-b)$, $2\pi(p-c)$ ou plus simplement $p-a$, $p-b$, $p-c$ en faisant abstraction du facteur de proportionnalité 2π.

Or, les poids partiels p se composent pour donner le poids $3p$ appliqué au point de concours des médianes g de ABC et les poids $-a$, $-b$, $-c$ admettent pour résultante $-(a+b+c) = -2p$ appliquée au centre I du cercle inscrit à ABC. Le centre de gravité G des trois circonférences est donc situé sur gI et défini par $\mathrm{IG} = 3\mathrm{I}g$, comme on s'en rend compte sans difficulté.

63. *Centre de gravité des arêtes latérales et polygonales d'une pyramide régulière.*

Soit la pyramide S.ABC... de sommet S.

Les poids des arêtes polygonales se composent pour donner un poids égal au périmètre $2p$ de la base appliqué au centre O de cette base.

Décomposons maintenant le poids a de chacune des arêtes latérales en deux poids $\frac{a}{2}$ appliqués à ses extrémités.

Nous aurons au sommet S le poids $n\frac{a}{2}$ et au point O un poids égal.

En résumé, il nous faut composer les poids $n\frac{a}{2}$ et $2p + \frac{na}{2}$ appliqués l'un au sommet, l'autre au centre de la base ; en appelant G leur centre, nous aurons donc

$$\frac{\mathrm{GO}}{\frac{na}{2}} = \frac{\mathrm{SO}}{2p + na};$$

mais

$$2p = nc,$$

c étant le côté de la base, et il vient finalement :

$$\frac{\mathrm{GO}}{\mathrm{SO}} = \frac{a}{2(a+c)}.$$

64. *Centre de gravité du contour polygonal que l'on obtient en considérant un polygone régulier et ôtant un côté.*

Si AB est le côté que l'on enlève, le contour restant admettra

pour axe de symétrie le diamètre perpendiculaire à AB et le centre de gravité sera défini sur cette droite en appliquant la formule

$$OG = \frac{\text{apoth.} \times \text{corde}}{\text{contour}}.$$

Or, si n est le nombre de côtés du polygone, R le rayon de la circonférence circonscrite, nous avons

$$\text{apothème} = R \cos \frac{\pi}{n}, \qquad \text{cont.} = (n-1) \times \text{corde},$$

et il viendra

$$OG = \frac{R}{n-1} \cos \frac{\pi}{n}.$$

Centre de gravité des surfaces.

65. *Aire du triangle.*

Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est le point de concours des médianes.

C'est aussi le centre des moyennes distances de ses sommets.

66. *Aire du quadrilatère.*

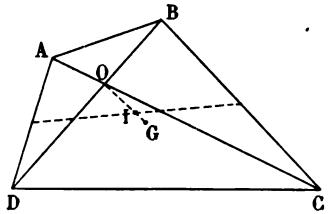
Le centre de gravité de l'aire d'un quadrilatère est situé sur la droite OI *qui joint le point de concours des diagonales au centre des moyennes distances des sommets et est défini sur cette droite par la relation* $OG = \frac{4}{3} OI$.

Considérons le quadrilatère ABCD comme la somme des deux triangles $ABC = s$, $ADC = s'$.

Ces deux triangles ayant même base AC, on a

$$\frac{s}{BO} = \frac{s'}{DO};$$

par conséquent en décomposant les poids de chacun de ces triangles en trois autres appliqués aux sommets et en négligeant



un même facteur de proportionnalité, on aura

(BO) appliqué en B,
(BO+DO) — en A et en C,
(DO) — en D.

Introduisons en B le poids DO et en D le poids BO, la résultante BO + DO de ces poids ayant pour centre O, il faudra pour ne rien changer appliquer en même temps à ce point O le poids — (BO + DO).

Dans ces conditions, nous aurons à chacun des sommets du quadrilatère le même poids (BO + OD) et au point de concours des diagonales le poids — (BO + OD) ; d'ailleurs, en divisant ces cinq forces par BO + OD, nous voyons que *le centre de gravité du quadrilatère coïncide avec le barycentre des sommets et du point d'intersection des diagonales, affectés des coefficients* 1, 1, 1, 1 *et* — 1.

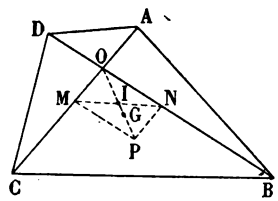
La résultante 4 des poids 1 est appliquée au centre I des moyennes distances des sommets, et finalement en composant 4 et — 1 on obtient le centre de gravité G situé sur OI et défini par

$$\frac{OG}{4} = \frac{OI}{3},$$

d'où

$$OG = \frac{4}{3}\,OI.$$

Remarque I. — Par les milieux M et N des diagonales menons les parallèles MP et NP à ces diagonales. *Le centre de gravité du quadrilatère coïncide avec celui du triangle* MNP. Nous devons cette remarque à M. Laisant.



En effet, le milieu I de MN est précisément le centre des moyennes distances des sommets et comme nous avons

$$OG = \frac{4}{3}OI,$$

il vient $$IG = \frac{1}{3} OI = \frac{1}{3} PI.$$

G est donc bien le centre de gravité du triangle MNP.

Remarque II. — On trouve les mêmes résultats quand le quadrilatère a un angle rentrant.

67. *Aire du trapèze de première espèce.*

1° Le théorème précédent donne par une construction simple le centre de gravité.

2° Le centre de gravité G appartient à la droite qui joint le milieu M de la grande base B au milieu N de la petite base b et est défini sur cette droite par la relation

$$\frac{GM}{GN} = \frac{B + 2b}{2B + b}.$$

Aire du trapèze de seconde espèce.

On considère ce trapèze comme la somme de ses deux triangles et on obtient avec les notations précédentes

$$\frac{GM}{GN} = \frac{2b^3 + 3b^2B + B^3}{b^3 + 3bB^2 + 2B^3}.$$

Secteur polygonal régulier.

G se trouve sur le rayon de symétrie et est donné par

$$OG = \frac{2}{3} \frac{\text{apoth.} \times \text{corde}}{\text{contour}}.$$

Secteur circulaire.

$$OG = \frac{2}{3} \frac{Rc}{a}.$$

Demi-cercle.

$$OG = \frac{4R}{3\pi}.$$

Segment circulaire à une base.

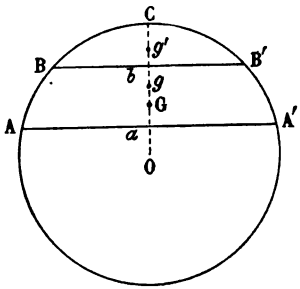
$$OG = \frac{c^3}{12S},$$

c étant la corde et S la surface du segment.

68. *Segment circulaire à deux bases.*

Soient, a et b les longueurs des bases AA′, BB′ du segment, g, g', G les centres de gravité des segments ACA′, BCB′ et ABB′A′, nous avons

$$\text{seg}^t\ ACA' = \text{seg}^t\ BCB' + \text{seg}^t\ ABB'A';$$



par conséquent en prenant les moments par rapport à O, il viendra :

$$Og.ACA' = Og'.BCB' + OG.ABB'A',$$

mais

$$Og = \frac{a^3}{12.ACA'},\quad Og' = \frac{b^3}{12.BCB'},$$

de sorte qu'en substituant nous obtiendrons

$$OG = \frac{a^3 - b^3}{12.ABB'A'},$$

ou bien

$$OG = \frac{a^3 - b^3}{12S},$$

S étant la surface du segment considéré.

69. *Surface du tétraèdre.*

Le centre de gravité de la surface d'un tétraèdre coïncide avec le centre de la sphère inscrite au tétraèdre qui a pour sommets les centres de gravité des faces du tétraèdre donné.

70. *Surface latérale d'une pyramide régulière.*

On trouve sans difficulté que son centre de gravité est situé sur la hauteur et au tiers à partir de la base.

Même résultat pour la surface latérale du *cône droit de révolution.*

71. *Surface latérale d'un tronc de pyramide régulière.*

Les faces du tronc sont des trapèzes égaux, qui tous ont leur

centre de gravité dans un plan parallèle aux bases et dont le rapport de ses distances à celles-ci est $\frac{2b+B}{2B+b}$. Par conséquent, le centre de gravité du tronc est situé sur sa hauteur et la partage dans le rapport $\frac{2+\alpha}{2\alpha+1}$, α étant le rapport de similitude linéaire des bases du tronc.

Même résultat pour le *tronc de cône droit de révolution.*

72. *Zone sphérique.*

Soient A, A′ les traces sur ses bases du diamètre qui leur est perpendiculaire.

Le centre de gravité est situé sur AA′ et entre A et A′.

D'autre part, en composant les poids des éléments superficiels symétriques par rapport à AA′, on obtient des poids appliqués sur AA′. Tout revient donc à chercher le centre de gravité de ces poids. D'ailleurs, un segment quelconque de AA′ qui est alors pesant a son poids proportionnel à la zone dont il est la hauteur, c'est-à-dire à la longueur de ce segment.

Par conséquent, AA′ est un segment *homogène* pesant et son centre de gravité est au milieu.

On trouve aussi une expression simple pour la distance OG du centre de gravité au centre de la sphère.

En effet on a

$$OG = \frac{OA + OA'}{2} = \frac{\overline{OA'}^2 - \overline{OA}^2}{2(OA' - OA)} = \frac{\overline{OA'}^2 - \overline{OA}^2}{2H},$$

H étant la hauteur de la zone.

D'autre part, r et r' étant les rayons des bases, nous avons

$$\overline{OA}^2 = R^2 - r^2, \qquad \overline{OA'}^2 = R^2 - r'^2,$$

d'où

$$\overline{OA'}^2 - \overline{OA}^2 = r^2 - r'^2.$$

Substituons, il viendra

$$OG = \frac{r^2 - r'^2}{2H} = \frac{R(\pi r^2 - \pi r'^2)}{2\pi RH},$$

ou bien finalement

$$OG = \frac{R(B - B')}{Z}.$$

B, B′ et Z représentant les surfaces des cercles bases et celle de la zone; quand $B' = 0$, on a $OG = \frac{R.B}{Z}$.

On pourra rapprocher cette formule de celle que nous avons obtenue dans le cas d'un arc de circonférence.

73. *Les centres de gravité du contour et de l'aire d'un polygone circonscrit à une circonférence sont en ligne droite avec le centre de cette circonférence et leurs distances à ce point sont dans le rapport de* 3 *à* 2.

(Brassine, *Journal de Liouville, 1843*.)

Cherchons le centre de gravité G de l'aire du polygone; pour cela décomposons-le en triangles OAB, OBC, ... en joignant ses sommets au centre O de la circonférence inscrite.

Ces triangles ayant même hauteur (le rayon de la circonférence), ont des poids proportionnels aux bases AB, BC, ...

Or nous pouvons décomposer le poids $\overline{AB}$ du triangle OAB en deux autres, l'un $\frac{AB}{3}$ appliqué en O, l'autre $2\frac{AB}{3}$ appliqué au milieu de AB.

Ceci fait, les poids appliqués en O auront pour résultant $\frac{1}{3}(AB + BC + \ldots)$, et ceux qui sont appliqués aux milieux des côtés se composeront pour donner le poids $\frac{2}{3}(AB + BC + \ldots)$ appliqué au point g qui est précisément le centre de gravité du périmètre du polygone.

Nous aurons donc finalement en composant ces deux poids résultants :

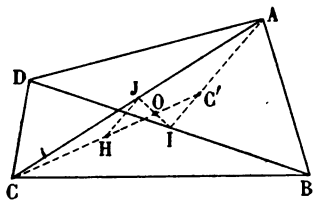
$$\frac{Og}{AB + BC + \cdots} = \frac{OG}{\frac{2}{3}(AB + BC + \cdots)},$$

d'où

$$\frac{Og}{OG} = \frac{3}{2}.$$

74. *Etant donné un quadrilatère* ABCD, *les centres de gravité des triangles* ABC, BCD, ACD, ADB *sont les sommets d'un quadrilatère qui lui est homothétique.*

Soit le quadrilatère ABCD; joignons les milieux I, J des diagonales et le centre de gravité C′ du triangle ABD au sommet C; enfin traçons la parallèle JH à IA.



Nous aurons $JH = \frac{AC'}{2} = C'I$.

Par suite les triangles OIC′ et OHJ sont égaux et donnent :

$$OI = OJ, \quad OC' = OH = \frac{OC}{3}.$$

En résumé les droites AA′, BB′, CC′, DD′ qui joignent les sommets du quadrilatère aux centres de gravité des triangles BCD, ACD, BAD, ABC concourent au milieu O de IJ et l'on a en outre

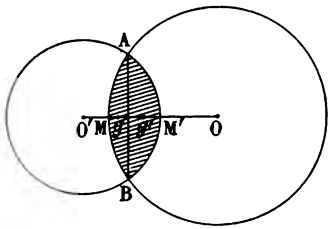
$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OD'}{OD} = \frac{1}{3}.$$

A′B′C′D′ et ABCD sont donc bien homothétiques.

75. *Deux circonférences* O, O′ *se coupent. Trouver le centre de gravité du segment curviligne commun à ces deux cercles.*

Soient g, g', G les centres de gravité des segments S = AMB, S′ = AM′B, AMBM′, nous aurons en prenant les moments par rapport à O

$$OG(S + S') = Og.S + Og'.S';$$



mais

$$Og = \frac{\overline{AB}^3}{12S},$$

$$Og' = d - O'g' = d - \frac{\overline{AB}^3}{12S'},$$

d étant la distance des centres, et il viendra

(1) $OG(S + S') = d.S'.$

Nous obtiendrons pareillement en prenant les moments par rapport à O'

(2) $$O'G(S + S') = d.S.$$

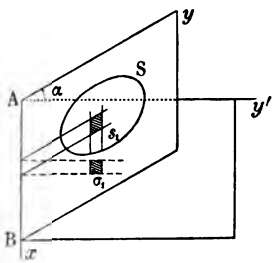
Divisons (1) et (2) nous aurons finalement

$$\frac{OG}{S'} = \frac{O'G}{S}.$$

Cette relation nous montre que G est aussi le centre des poids S et S' appliqués respectivement aux centres O et O'.

76. *La projection orthogonale du centre de gravité d'une surface plane coïncide avec le centre de gravité de sa projection.*

Décomposons l'aire donnée par des parallèles à Ax et Ay en petits rectangles $s_1, s_2, \ldots$ dont les centres de gravité ont pour coordonnées, par rapport aux axes, xAy : $x_1y_1, x_2y_2, \ldots$; yAy' étant un rectiligne des deux plans. Soient d'autre part ξ, η les coordonnées du centre de gravité de la surface S et ξ', η' celles du centre de gravité de sa projection rapportée aux axes xAy'.



Le théorème étant vrai évidemment pour chacun des rectangles, les coordonnées du centre de gravité de la projection du rectangle s_1 seront x_1 et $y_1 \cos \alpha$; ce rectangle projection a pour aire $\sigma_1 = s_1 \cos \alpha$.

Ceci posé, le théorème des moments nous donnera

$$\xi S = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots,$$

$$\eta S = y_1 s_1 + y_2 s_2 + \cdots,$$

puis

$$\xi' S \cos\alpha = x_1 s_1 \cos\alpha + x_2 s_2 \cos\alpha + \cdots,$$

$$\eta' S \cos\alpha = y_1 s_1 \cos^2\alpha + y_2 s_2 \cos^2\alpha + \cdots$$

Par conséquent $\xi = \xi'$

et $\eta \cos\alpha = \eta'$;

ξ et $\eta \cos\alpha$ étant les coordonnées de la projection du centre de gravité de la surface, la proposition est établie.

77. *Centre de gravité d'une demi-ellipse.*

Soit la portion de l'ellipse comprise entre la courbe et le diamètre dd'; l'ellipse peut être considérée comme la projection d'un cercle ayant pour diamètre le grand axe, et la demi-ellipse considérée sera la projection du demi-cercle précédent de diamètre DD'. Le centre de gravité G de ce demi-cercle est situé sur le rayon OD'' perpendiculaire à DD', par conséquent, la projection g de G, c'est-à-dire le centre de gravité de la demi-ellipse appartiendra au diamètre Od'' conjugué de dd'.

On a d'ailleurs

$$\frac{Og}{OG} = \frac{Od''}{OD''},$$

donc

$$Og = Od''\frac{OG}{OD''};$$

mais

$$OG = \frac{4.OD''}{3\pi},$$

et il viendra finalement

$$Og = \frac{4}{3\pi} Od''.$$

Cas particulier : **1.** — dd' est le grand axe; le centre de

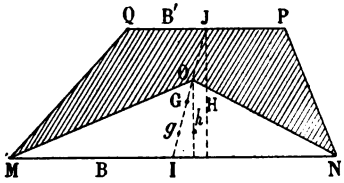
gravité est situé sur le petit axe à une distance du centre

$$Og = \frac{4b}{3\pi}.$$

2. — dd' est le petit axe ; dans ce cas, le centre de gravité est défini sur le grand axe par

$$Og = \frac{4a}{3\pi}.$$

78. *Étant donné un trapèze, trouver à son intérieur un point* O *tel que ce point soit le centre de gravité de l'aire qui reste quand on enlève le triangle qui a pour sommet* O *et pour base l'une des bases du trapèze.*



Soient G et g les centres de gravité du trapèze MNPQ et du triangle OMN. Par hypothèse O étant le centre de gravité de l'aire MQPNO, différence du trapèze et du triangle, se trouvera sur la droite Gg. Ce point O appartient donc nécessairement au segment IJ joignant les milieux des bases MN et PQ.

En prenant les moments par rapport à I il viendra

$$\text{IG.trap.} = \text{I}g\text{.triang.} + \text{IO(trap.} - \text{triang.)} ;$$

mais nous avons

$$\text{trap.} = \frac{\text{B} + \text{B}'}{2}\text{H}, \qquad \text{triang.} = \frac{\text{B}h}{2},$$

et en posant

$$\text{IO} = x, \qquad \text{IJ} = m;$$

nous aurons $\quad \text{IG} = \dfrac{2\text{B}' + \text{B}}{3(\text{B}' + \text{B})}m, \qquad \text{I}g = \dfrac{x}{3};$

par conséquent en substituant, nous obtiendrons

$$\frac{2\text{B}' + \text{B}}{3}\text{H}m = \text{B}h\frac{x}{3} + [(\text{B} + \text{B}')\text{H} - \text{B}h]x$$

ou bien en remarquant que l'on a :

$$\frac{h}{x} = \frac{H}{m},$$

et ordonnant :

$$(1) \quad f(x) = 2Bx^2 - 3(B + B')mx + (B + 2B')m^2 = 0.$$

Remarquant que l'on doit avoir $0 < x < m$, nous formerons $f(0)$ et $f(m)$.

Or, nous avons

$$f(0) = (B + 2B')m^2 > 0,$$

$$f(m) = -B' < 0.$$

Par conséquent il y a toujours une racine positive inférieure à m, et le problème qui est toujours possible n'admet qu'une solution.

Cas particulier (*Bacc. ès sc. et lett.-math. Bastia, 1894*).

Le trapèze est un parallélogramme. On a alors $B' = B$, $m = B$.

En introduisant ces hypothèses particulières dans (1), on obtient

$$x = \frac{B(3 - \sqrt{3})}{2}.$$

Lorsque le trapèze se réduit à un triangle, on a $B' = 0$ et par suite

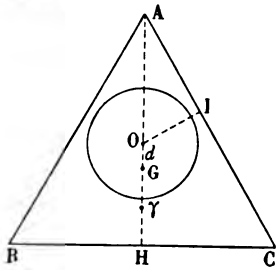
$$x = \frac{m}{2},$$

mais ce résultat s'obtient directement avec facilité.

79. *Dans un triangle équilatéral en tôle* ABC, *dont le côté est a, on enlève un disque de rayon r dont le centre* O *se trouve sur la hauteur* AH, *à une distance d du centre de gravité du triangle. Chercher le centre de gravité de la partie restante. Déterminer r de façon que ce centre soit le plus près possible de la base* BC. *Peut-on déterminer r par la condition que ce centre de gravité soit symétrique de* O *par rapport à* G ?

(*Bacc., Grenoble, 1887.*)

1° Le triangle étant la somme du cercle et de la partie restante, nous aurons, en appelant γ le centre de gravité cherché,



$$\frac{\gamma G}{\pi r^2} = \frac{d}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \pi r^2},$$

d'où

$$\gamma G = \frac{\pi r^2 d}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \pi r^2}.$$

Le second membre croît avec r^2, donc γG sera le plus grand possible quand on aura $r = OI$, puisque OI est la plus grande valeur de r, ou bien

$$r = AO \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{d}{2}.$$

2° Supposons $G\gamma = d$, il viendra

$$2\pi r^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

d'où

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}.$$

Pour que cette valeur convienne, il faut qu'elle soit inférieure au maximum de r, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}} < \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{d}{2},$$

d'où

$$d < a\left[\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}\right].$$

80. *Centre de gravité de la surface totale d'un cône droit de révolution.*

Par raison de symétrie ce point appartient à l'axe du cône.

Inscrivons dans la circonférence-base un polygone régulier et joignons ses sommets à celui du cône, nous obtenons ainsi laté-

ralement des triangles dont la somme des surfaces a pour limite, quand on double indéfiniment les côtés du polygone inscrit, la surface latérale du cône.

Les centres de gravité de ces triangles sont tous situés dans un plan parallèle à celui de la base et à une distance de ce dernier égale au tiers de la hauteur du cône.

Nous aurons donc, en passant à la limite, au point g de la hauteur tel que $Og = \frac{h}{3}$, le poids $\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ de la surface latérale, puis au centre O, le poids πR^2 de la base.

Soit G le centre de gravité de la surface totale, et appliquons le théorème des moments par rapport au plan de la base, il viendra

$$\pi R\sqrt{R^2 + h^2}\,\frac{h}{3} = (\pi R\sqrt{R^2 + h^2} + \pi R^2)OG,$$

d'où

$$OG = \frac{h\sqrt{R^2 + h^2}}{3(R + \sqrt{R^2 + h^2})}.$$

81. *Trouver le centre de gravité de la surface latérale d'une pyramide circonscrite à un cône droit de révolution.*

Soit la pyramide S.ABCD... de sommet S. Les faces latérales SAB, SBC, ... ont même hauteur; en effet, d'après le théorème des trois perpendiculaires et en vertu de l'hypothèse, ces hauteurs sont des obliques qui sont également éloignées de la hauteur du cône.

Les poids de ces faces sont donc proportionnels aux côtés AB, BC, ...

Décomposons le poids (AB) de la face SAB en deux autres l'un $\left(\frac{AB}{3}\right)$ appliqué au sommet S, l'autre $\left(2\frac{AB}{3}\right)$ appliqué au milieu de AB et faisons la même opération pour les autres faces; nous aurons au sommet S le poids $\left(\frac{AB}{3} + \frac{BC}{3} + \ldots\right)$ et au centre de gravité du périmètre de la base le poids

$$2\left(\frac{AB}{3} + \frac{BC}{3} + \ldots\right).$$

Par conséquent, le centre de gravité de la surface latérale de la pyramide appartient à la droite qui joint le sommet au centre de gravité du périmètre de la base et partage cette droite au tiers à partir de la base.

Remarque. — Il suffit de supposer que la hauteur du cône tende vers zéro pour retrouver l'un des théorèmes de Brassine (73).

Centre de gravité des volumes.

82. *Prisme.*

Le centre de gravité du prisme coïncide avec le centre de gravité de l'aire de la section parallèle aux bases et à égale distance de leurs plans ; ou bien encore, avec le milieu de la droite qui joint les centres de gravité des bases.

Même résultat pour le *cylindre.*

Dans le cas particulier du prisme triangulaire le centre de gravité coïncide avec le centre des moyennes distances de ses sommets.

83. *Tétraèdre.*

Le centre de gravité d'un tétraèdre est situé sur la droite qui joint un sommet quelconque au centre de gravité de la face opposée et au quart de ce segment à partir de la base.

C'est aussi le centre de gravité de la section du solide par un plan parallèle à l'une des faces mené au quart de la distance de cette face au sommet opposé.

Enfin, ce point se confond avec le centre des moyennes distances des sommets du tétraèdre.

84. *Pyramide.*

Le centre de gravité d'une pyramide est situé sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base et au quart de ce segment à partir de la base.

Ce point coïncide d'ailleurs avec le centre de gravité de la section de la pyramide par le plan parallèle à sa base mené au quart de la distance de cette base au sommet.

Même résultat pour le *cône*.

85. *Tronc de pyramide de première espèce.*

Son centre de gravité qui est situé sur la droite joignant les centres de gravité des bases partage ce segment dans le rapport

$$\frac{\lambda^3 + 2\lambda + 3}{3\lambda^2 + 2 + 1},$$

λ représentant le rapport de similitude linéaire des bases.

Tronc de pyramide de seconde espèce.

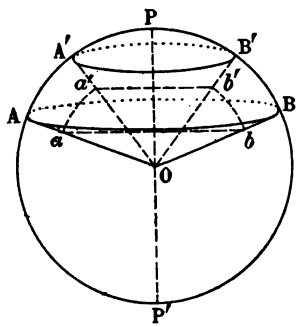
Dans ce cas les deux bases sont homothétiques inverses et en appelant $-\lambda$ leur rapport d'homothétie on trouve le même résultat que précédemment.

Mêmes résultats pour les deux *troncs de cône*.

86. *Secteur sphérique.*

Décomposons la zone ABA'B' qui sert de base au secteur en quadrilatères curvilignes équivalents par des petits cercles perpendiculaires à PP' et équidistants, et par des cercles méridiens passant par PP' et à égale distance angulaire.

En joignant les sommets de ces quadrilatères au centre O, nous obtiendrons des pyramides quadrangulaires, et si les parallèles d'une part et les méridiens de l'autre sont suffisamment rapprochés, leurs bases pourront être assimilées à des quadrilatères plans d'ailleurs équivalents. En d'autres termes, toutes ces pyramides dont l'ensemble constitue le secteur sphérique sont équivalentes et ont par suite même poids. Leurs centres de gravité seront distribués sur la zone *aba'b'*, homothétique à ABA'B', appartenant



à la sphère de centre O et de rayon

$$Oa = \frac{3}{4}\,OA.$$

D'autre part, les poids de ces pyramides seront distribués d'une façon homogène sur cette zone qui est elle-même décomposée en quadrilatères équivalents par les faces des pyramides élémentaires.

Leur centre coïncidera donc avec le centre de gravité de la zone $aba'b'$.

Or, soient G et g les centres de gravité des zones ABA'B' et $aba'b'$, nous avons

$$Og = \frac{3}{4}\,OG,$$

mais (72) :

$$OG = \frac{R(B - B')}{Z},$$

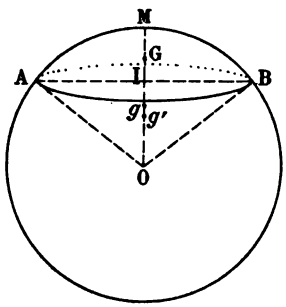
donc

$$Og = \frac{3}{4}\,\frac{R(B - B')}{Z},$$

R étant le rayon de la sphère, Z la zone ABA'B', B et B' les cercles AB, A'B'.

Dans le cas particulier du secteur à une base, on a : $B' = 0$ et on obtient

$$Og = \frac{3}{4}\,\frac{R.B}{Z}.$$



87. *Segment sphérique à une base.*

Soit le segment AMB ; nous pouvons le considérer comme la différence entre le secteur O.AMB et le cône OAB. Par conséquent si G, g, g' sont les centres de gravité du segment, du secteur et du cône, il viendra en prenant les moments par rapport à O

$$OG.\ \text{vol. seg}^t = Og.\ \text{vol. sect.} - Og'.\ \text{vol. cône};$$

mais

$$\text{vol. sect.} = \frac{R}{3}\,\text{zone AMB}, \qquad Og = \frac{3}{4}\,\frac{\text{R. cercle AB}}{\text{zone AMB}};$$

$$\text{vol. cône} = \frac{OI}{3}\,\text{cercle AMB}, \qquad Og' = \frac{3}{4}\,OI;$$

$$\text{vol. seg}^t = V;$$

et, en substituant, nous obtiendrons après réduction

$$OG = \frac{B^2}{4\pi V},$$

où l'on a posé $B =$ cercle AB.

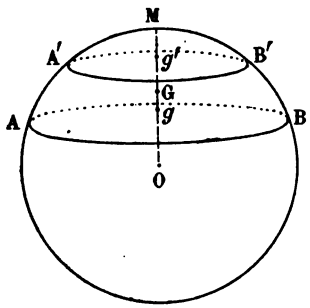
88. *Segment sphérique à deux bases.*

Considérons le segment à deux bases ABA'B' comme la différence entre les segments à une base, AMB et A'MB', il viendra en prenant les moments par rapport à O

OG. vol. seg^t ABB'A' = Og. vol. seg^t AMB — Og' vol. seg^t A'MB',

mais

$$Og = \frac{B^2}{4\pi\,\text{seg}^t\,\text{AMB}}, \qquad Og' = \frac{B'^2}{4\pi\,\text{seg}^t\,\text{A'MB'}},$$



par conséquent si nous posons

$$\text{vol. seg}^t\,\text{ABB'A'} = V,$$

nous obtiendrons après substitution

$$OG = \frac{B^2 - B'^2}{4\pi V},$$

B et B' représentent les surfaces des cercles bases AB et A'B'.

Hémisphère.

L'hémisphère est un segment sphérique à une base; on a de plus

$$B = \pi R^2, \qquad V = \frac{2}{3}\pi R^3;$$

de sorte que nous aurons

$$OG = \frac{3}{8}R.$$

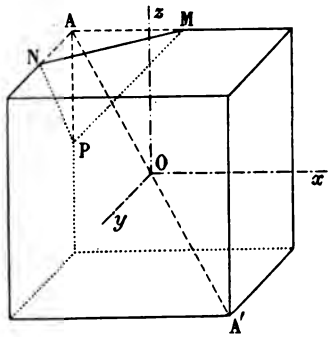
89. *Les centres de gravité de la surface et du volume d'un polyèdre circonscrit à une sphère sont en ligne droite avec le centre de la sphère et leurs distances à ce point sont dans le rapport* $\frac{4}{3}$.

(Brassine, *Journal de Liouville*, *1843*.)

Même démonstration que dans le cas du polygone circonscrit à une circonférence (73).

90. *On coupe un cube par le plan qui passe par les milieux de trois arêtes aboutissant à un même sommet, et on enlève le tétraèdre qui a pour base la section du cube par ce plan; trouver le centre de gravité de la partie restante.*

Supposons qu'on enlève du cube le tétraèdre AMNP et proposons-nous de chercher le centre de gravité G du solide restant.



Pour cela, il faut composer le poids a^3 du cube appliqué en son centre O et les poids négatifs $-\frac{a^3}{192}$ égaux au quart du volume du tétraèdre et appliqués à chacun de ses sommets.

Le centre de gravité sera le centre de ces cinq forces parallèles.

Nous le déterminerons par le calcul et à cet effet nous rapporterons le cube à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz passant par son centre et parallèles aux arêtes.

Nous avons pour les coordonnées des sommets du tétraèdre

$$(M)\quad \begin{cases} x = 0, \\ y = -\frac{a}{2}, \\ z = \frac{a}{2}; \end{cases} \qquad (N)\quad \begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ y = 0, \\ z = \frac{a}{2}; \end{cases}$$

$$(P)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{a}{2}, \\ y = -\dfrac{a}{2}, \\ z = 0; \end{cases} \qquad (A)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{a}{2}, \\ y = -\dfrac{a}{2}, \\ z = \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées de G, il viendra par l'application des formules connues (36)

$$\xi\frac{47}{48}a^3 = \frac{3a}{2}\frac{a^3}{192},$$

$$\eta\frac{47}{48}a^3 = \frac{3a}{2}\frac{a^3}{192},$$

$$\zeta\frac{47}{48}a^3 = -\frac{3a}{2}\frac{a^3}{192};$$

d'où

$$\xi = \frac{3}{376}a, \qquad \eta = \frac{3}{376}a, \qquad \zeta = -\frac{3}{376}a,$$

ξ, η, ζ étant proportionnelles aux coordonnées de A, G se trouve sur AA', en outre comme $\xi > 0$, G appartient au segment OA'.

Calculons OG, nous avons

$$OG = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

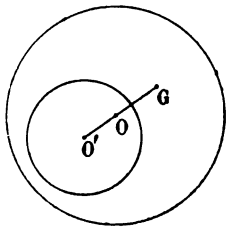
d'où

$$OG = \frac{3\sqrt{3}}{376}a.$$

Nous avons adopté cette méthode pour donner une nouvelle application de la recherche analytique du centre de forces parallèles ; la méthode élémentaire conduit aussi rapidement au résultat.

91. *Centre de gravité d'une sphère dans laquelle on a pratiqué une cavité sphérique, connaissant les rayons des deux sphères et la distance de leurs centres.*

Soient R, R′ les rayons des deux sphères, d la distance OO′ des centres, enfin G le centre de gravité de la sphère entaillée.



Nous aurons, en composant les forces parallèles et de sens contraire appliquées en O et O′

$$\frac{GO}{\frac{4}{3}\pi R'^3} = \frac{OO'}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - R'^3)},$$

d'où

$$GO = \frac{R'^3 d}{R^3 - R'^3}.$$

92. *Centre de gravité d'un* DÉ A JOUER. — *Les faces sont percées de trous au nombre de* 1 *et* 6, 2 *et* 5, 3 *et* 4 *par couples de faces opposées ; on suppose en outre que ces trous sont placés de façon à ne pas déranger le centre de gravité des faces et que chaque trou enlève* $\frac{1}{p}$ *du volume total.*

(*Nouvelles Annales*, *1858*.)

Soient a l'arête du cube et $x_1, x_2, \ldots, x_6$ les distances du centre de gravité cherché aux faces (1), (2), ..., (6).

Le dé est la différence du cube et des 21 trous; nous avons donc à chercher le centre des forces parallèles, l'une dirigée vers la pesanteur appliquée au centre du cube et d'intensité a^3, les autres de sens contraire appliquées respectivement aux centres des faces et d'intensités $\frac{a^3}{p}, \frac{2a^3}{p}, \ldots, \frac{6a^3}{p}$.

Ceci posé appliquons le théorème des moments par rapport à la face (1), il viendra

$$a^3\left(1 - \frac{21}{p}\right)x_1 = \frac{a}{2}a^3 - 6a\frac{a^3}{p} - 14\frac{a}{2}\frac{a^3}{p},$$

d'où

$$x_1 = \frac{a}{2(p-21)}(p - 26),$$

ou bien encore

$$x_1 = \frac{a}{2(p-21)}(p-21+1-6).$$

On trouvera pareillement

$$x_2 = \frac{a}{2(p-21)}(p-21+2-5),$$

$$x_3 = \frac{a}{2(p-21)}(p-21+3-4),$$

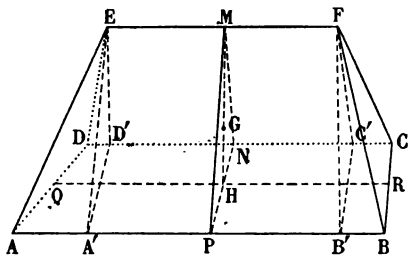
$$x_4 = \frac{a}{2(p-21)}(p-21+4-3),$$

$$x_5 = \frac{a}{2(p-21)}(p-21+5-2),$$

$$x_6 = \frac{a}{2(p-21)}(p-21+6-1).$$

93. *Centre de gravité du volume d'un tronc de prisme dont une face est rectangulaire et les bases symétriques par rapport à un plan de section droite.*

Soit le tronc de prisme ABCDEF ; la face ABCD est un rectangle et les bases ADE, BCF sont symétriques par rapport au plan de la section droite MNP.



Le centre de gravité G du volume de ce solide se trouvant dans le plan de symétrie MNP et dans le plan EFQR qui est diamétral pour les cordes parallèles à AD appartient à leur intersection MH.

Menons les sections droites EA'D', FB'C' et considérons le tronc de prisme comme la somme du prisme A'B'C'D'EF et des deux pyramides d'ailleurs équivalentes E.AA'DD', F.BB'CC'.

Si nous posons $AB = a$, $AD = b$, $EF = a'$ et $h =$ distance de EF à la face opposée, nous aurons

$$\text{Vol. } A'B'C'D'EF = \frac{1}{2}\, a'bh,$$

$$\text{Vol. } ADA'D'E = \text{Vol. } BCB'C'F = \frac{1}{6}(a - a')bh,$$

$$\text{Vol. } ABCDEF = \frac{1}{6}\,(2a + a')bh.$$

D'autre part, les centres de gravité du prisme et des deux pyramides sont distants de la face ABCD de $\frac{h}{3}$ et $\frac{h}{4}$.

Par suite, si nous appelons x la distance du point G à cette face, nous obtiendrons en appliquant le théorème des moments par rapport à ce même plan

$$\frac{1}{2}\, a'bh \,.\, \frac{h}{3} + \frac{1}{3}(a - a')bh \,.\, \frac{h}{4} = x(2a + a')b\,\frac{h}{6},$$

d'où

$$x = \frac{a + a'}{2(2a + a')}\, h.$$

Mais

$$\frac{x}{h} = \frac{HG}{HM}.$$

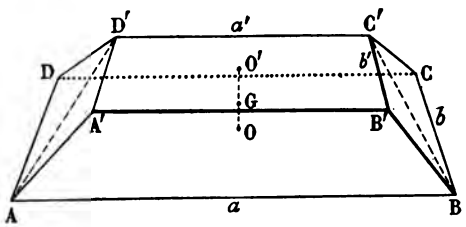
Nous aurons donc finalement

$$\frac{HG}{HM} = \frac{a + a'}{2(2a + a')}.$$

Cette relation détermine le point G sur la droite MH qui joint le milieu de EF au centre du rectangle ABCD.

94. *Centre de gravité du* TAS DE SABLE.

Le centre de gravité du tas de sable ABCDA'B'C'D' appartient évidemment à la droite OO' qui joint les centres des deux bases. Pour déterminer ce point G sur OO' décomposons le solide au moyen du plan ABC'D', nous obtenons deux troncs de prisme dont l'une



des faces est un rectangle et les deux bases sont symétriques par rapport à un plan de section droite. Nous avons

$$\text{vol. } ABA'B'C'D' = b'(2a' + a)\frac{h}{6},$$

$$\text{vol. } ABCDC'D' = b(2a + a')\frac{h}{6},$$

$$\text{vol. } ABCDA'B'C'D' = \frac{h}{6}[(2a + a')b + (2a' + a)b'].$$

D'autre part les distances des centres de gravité au plan ABCD sont (93) $h - \frac{h}{2}\frac{a + a'}{2a' + a}$, et $\frac{h}{2}\frac{a + a'}{2a + a'}$, il viendra donc en prenant les moments par rapport à ce plan

$$\frac{h}{6}[(2a + a')b + (2a' + a)b']OG$$
$$= b(2a + a')\frac{h}{6}\cdot\frac{a + a'}{2a + a'}\frac{h}{2} + b'(2a' + a)\frac{h}{6}\cdot\frac{3a' + a}{2a' + a}\cdot\frac{h}{2},$$

d'où

$$OG = \frac{b(a + a') + b'(3a' + a)}{b(2a + a') + b'(2a' + a)}\cdot\frac{h}{2};$$

nous aurons de même

$$O'G = \frac{b(3a + a') + b'(a' + a)}{b(2a + a') + b'(2a' + a)}\frac{h}{2},$$

et finalement

$$\frac{OG}{O'G} = \frac{b(a + a') + b'(3a' + a)}{b(3a + a') + b(a' + a)}.$$

Remarque. — Si le tas de sable a la forme d'un tronc de pyramide, les arêtes AA', BB', ... sont concourantes et on a

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

La formule précédente devient alors

$$\frac{OG}{O'G} = \frac{3a'^2 + 2aa' + a^2}{3a^2 + 2aa' + a'^2}$$

Théorèmes de Guldin.

95. Théorème I. — *La surface engendrée par une ligne plane effectuant une révolution entière autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égale au produit de la longueur de cette ligne par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Théorème II. — *Le volume engendré par une aire plane effectuant une révolution entière autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

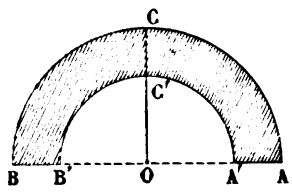
Ces théorèmes donnent les surfaces et les volumes des solides de révolution quand on connaît la longueur et l'aire de la méridienne et leurs centres de gravité.

Inversement ils permettent quelquefois de déterminer le centre de gravité d'une ligne ou d'une aire plane.

96. ACB *et* A'C'B' *sont deux demi-circonférences ayant même centre* O *et situées au-dessus d'un même diamètre.*

Trouver le centre de gravité du contour A'ACBB'C' *et celui de la surface qu'il limite.*

Soient G et G' les centres de gravité du contour et de l'aire. Ces deux points appartiennent à l'axe de symétrie OC.



Pour calculer OG et OG', faisons tourner la figure autour du diamètre AB, nous aurons, en posant $OA = a$, $OA' = a'$, et appliquant les théorèmes de Guldin :

$$2\pi OG[\pi(a + a') + 2(a - a')] = 4\pi(a^2 + a'^2),$$

d'où

$$OG = \frac{2(a^2 + a'^2)}{\pi(a + a') + 2(a - a')}.$$

Puis,

$$2\pi OG' \frac{\pi a^2 - \pi a'^2}{2} = \frac{4}{3}\pi(a^3 - a'^3),$$

d'où

$$OG' = \frac{4(a^2 + aa' + a'^2)}{3\pi(a + a')}.$$

97. *Surface du tore.*

Soit R le rayon du cercle O qui tourne autour d'un axe situé dans son plan et ne le traversant pas et d la distance de son centre à l'axe.

La circonférence engendrera dans sa rotation la surface du tore et nous aurons en appliquant le premier théorème de Guldin

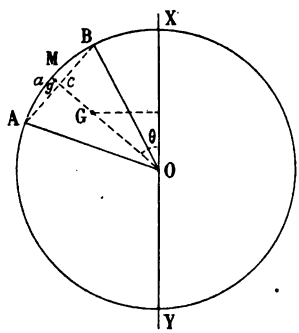
$$S = 2\pi d . 2\pi R,$$

ou

$$S = 4\pi^2 R d.$$

98. *Volume du secteur sphérique.*

Soit le secteur circulaire OAB, si nous le faisons tourner autour du diamètre XY il engendrera le secteur sphérique, et nous aurons pour le volume de ce solide



$$V = 2\pi OG \sin\theta . \frac{Ra}{2},$$

mais

$$OG = \frac{2}{3}\frac{Rc}{a},$$

donc

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 c \sin\theta,$$

ou enfin, en remarquant que $c \sin\theta$ est la projection H de AB sur XY,

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

99. *Volume de l'anneau sphérique.*

Le segment AMB en tournant autour de XY (fig. précédente) engendre un anneau sphérique ; par conséquent, si V est son volume et S la surface du segment AMB, nous aurons

$$V = S.2\pi Og \sin\theta ;$$

mais

$$Og = \frac{\overline{AB}^3}{12S} = \frac{c^3}{12S},$$

et

$$c \sin\theta = H,$$

donc il viendra finalement

$$V = \frac{1}{6}\pi c^2 H.$$

100. *Volume de l'ellipsoïde de révolution.*

1° Soit l'ellipse ayant pour grand axe $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$ pour petit axe. La demi-ellipse BAB' en tournant autour de BB' engendre l'ellipsoïde *aplati* de révolution.

Appliquons le second théorème de Guldin, il viendra pour le volume de ce solide

$$V = \text{aire } BAB' \times 2\pi OG ;$$

mais

$$\text{aire } BAB' = \frac{\pi ab}{2}, \qquad OG = \frac{4a}{3\pi},$$

donc

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

2° On obtient pareillement pour l'ellipsoïde de révolution *allongé*, engendré par la révolution de la demi-ellipse ABA' autour du grand axe AA',

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

101. *Volume du tore.*

Proposons-nous d'évaluer le volume balayé par l'aire d'un

cercle de rayon R tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne le traversant pas.

Il suffit pour cela d'appliquer le second théorème de Guldin, il viendra effectivement en appelant d la distance du centre du cercle à l'axe

$$V = \pi R^2 . 2\pi d,$$

ou bien

$$V = 2\pi^2 R^2 d.$$

EXERCICES

45. — Centre de gravité du périmètre d'un triangle dont les côtés sont homogènes mais de poids inversement proportionnels à leurs longueurs.

46. — Centre de gravité du périmètre d'un demi-octogone régulier et du diamètre qui le ferme.

47. — Etant donné un polygone régulier de n côtés, on ôte deux côtés adjacents ; trouver le centre de gravité du périmètre restant.

48. — Centre de gravité des arêtes d'un tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales.

49. — Centre de gravité du périmètre d'un triangle et de la circonférence inscrite.

50. — Etant donné l'hexagone régulier ABCDEF et son centre O, trouver le centre de gravité de l'aire OCBAFE.

51. — En traçant dans un carré les droites qui joignent les milieux de deux côtés consécutifs, on forme des triangles égaux ; trouver le centre de gravité de l'aire qui reste quand on ôte 1, 2 ou 3 de ces triangles.

52. — On joint le centre O d'un parallélogramme à deux sommets consécutifs A, B, trouver le centre de gravité de la partie qui reste quand on enlève le triangle OAB.

53. — Dans un rectangle ABCD, on joint les milieux M, N des côtés CD, CB, trouver le centre de gravité de la partie qui reste quand on enlève le triangle MCN.

(*Saint-Cyr 1889.*)

54. — Sur les trois côtés d'un triangle rectangle on construit des carrés. Trouver le centre de gravité de l'aire formée par ces trois carrés et le triangle.

(*Saint-Cyr.*)

55. — Un triangle est coupé par une parallèle à la base, et la surface du petit triangle est la $n^{ième}$ partie de l'aire totale. Trouver le centre de gravité de la partie restante.

56. — Centre de gravité de la surface totale d'un cube dont une des faces est enlevée.

57. — Trouver le centre de gravité du triangle en le considérant comme la somme d'un nombre infiniment croissant de rectangles inscrits.

58. — Même question pour le trapèze.

59. — Soit I le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC ; calculer le rayon de la circonférence de centre I qu'il faut découper dans le triangle pour que le centre de gravité de la partie restante soit le point de concours des hauteurs de ABC.

60. — Centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de cône de seconde espèce.

61. — Centre de gravité de la surface totale des deux troncs de cône.

62. — Centre de gravité d'un quart d'ellipse limité à deux demi-diamètres conjugués.

63. — Deux cônes ont même base circulaire ; leurs sommets sont situés sur l'axe du cercle. Trouver le centre de gravité du volume limité par les deux surfaces coniques.

64. — Le rayon intérieur d'une coupe hémisphérique est a et son épaisseur e. Trouver son centre de gravité. Examiner le cas limite où e tend vers zéro, et justifier ce dernier résultat.

65. — On donne un cube homogène d'arête a ; par les extrémités des arêtes partant d'un même sommet on mène un plan sécant qui détache une pyramide triangulaire. Centre de gravité du volume restant.

66. — Dans un cône de révolution d'ouverture 2α on inscrit n sphères tangentes entre elles. Le rayon de la sphère la plus rapprochée du sommet est r. Centre de gravité du système.

(*Bacc. ès sc., Besançon.*)

67. — Centre de gravité du volume commun à deux sphères sécantes.

68. — Dans le tronc de pyramide, si S_0, S_1 et Σ sont les bases et la section faite par un plan parallèle aux bases et équidistant de celles-ci, le rapport des distances de son centre de gravité aux bases est donné par

$$\frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{S_1 + 2\Sigma}{S_0 + 2\Sigma}.$$

69. — Une plaque rectangulaire plonge dans un liquide et l'un des côtés est dans le plan de la surface libre. Déterminer le centre de pression.

70. — Dans un vase cylindrique ou conique on verse un liquide de densité connue. Quelle quantité faut-il verser pour que le centre de gravité du vase et du liquide soit dans le plan de la surface libre ?

71. — Un corps est limité par une face plane ABCD ayant un axe vertical de symétrie BD, par une arête EF également verticale, et par la surface courbe qu'engendre une horizontale en s'appuyant constamment sur le contour ABCD et sur la droite EF. On demande : 1° d'évaluer le volume du corps en le décomposant en tranches minces par des plans perpendiculaires à une certaine droite fixe ; 2° de déterminer le centre de gravité d'une section plane A'B'C'D' parallèle à la face ABCD, étant donné le centre de gravité O de cette dernière ; 3° de déterminer le centre de gravité général du volume.

(*Conc. acad. Douai, 1878.*)

72. — Deux polygones convexes P, P′, dont l'un, intérieur à l'autre, est circonscrit à une circonférence, ont leurs côtés parallèles et situés à la même distance. Trouver le centre de gravité de l'aire limitée par les contours de ces polygones. Examiner le cas limite où cette aire tend vers zéro et déduire de cet examen la démonstration du théorème de Brassine.

73. — Même question quand on remplace les polygones par des polyèdres et la circonférence par une sphère.

74. — Dans n rondelles d'égale épaisseur et de rayons proportionnels à 1, 3, 5, 7, ..., on découpe des secteurs ayant même angle au centre. On superpose ces secteurs dans leur ordre de grandeur et de facon que leurs bords rectilignes soient dans deux plans verticaux. Montrer que les distances à l'intersection des deux plans des centres de gravité de la pile ainsi formée et du premier secteur sont entre elles dans le rapport $\frac{3n(2n^2-1)}{4n^2-1}$.

75. — Un cube non homogène repose par sa base sur le plan horizontal. La densité, qui est la même en tous les points d'un même plan horizontal du cube, varie à mesure qu'on s'éloigne de la base : 1° proportionnellement à la distance de chaque plan à cette base ; 2° proportionnellement au carré de cette distance. Trouver dans chaque cas, la position du centre de gravité du cube.

76. — Trouver la surface et le volume engendrés par un hexagone régulier tournant autour d'un de ses côtés.

77. — Même question pour un polygone régulier de n côtés. Examiner le cas limite où n devient infini.

78. — Trouver le centre de gravité de la surface et du volume du solide engendré par la révolution complète d'un anneau circulaire autour d'un axe situé dans son plan et ne le traversant pas.

79. — Trouver les centres de gravité d'une demi-circonférence et du demi-cercle en appliquant les théorèmes de Guldin.

80. — Trouver le rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de deux côtés adjacents.

81. — Sur une droite Ox, on considère n points $O_1, O_2, \ldots, O_n$, les distances OO_1, O_1O_2, ..., variant comme les termes d'une progression géométrique, et l'on décrit d'un même côté de Ox des demi-circonférences sur les segments OO_1, O_1O_2, ... comme diamètres. On propose de déterminer le centre de gravité de cette série d'arceaux.

CHAPITRE V

FORCES APPLIQUÉES A UN SOLIDE. — ÉQUILIBRE DU SOLIDE LIBRE.

---

102. Lorsque des forces sont appliquées à un solide, on ne peut pas en général trouver une force unique produisant le même effet, en d'autres termes elles n'admettent pas de résultante en général.

Le problème de la réduction montre que de telles forces en nombre quelconque peuvent être remplacées par *trois* appliquées en trois points non en ligne droite arbitrairement choisis dans le solide ou bien encore par *deux* forces R, S, dont le point d'application de l'une est arbitraire. Enfin, comme on le voit aisément, le système de ces deux forces peut encore être remplacé par une force et un couple.

Les conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un solide sont au nombre de six; pour simplifier les calculs on prend trois axes rectangulaires et on obtient en projetant les forces sur les axes et en prenant leurs moments par rapport à ces mêmes droites

$$(1)\quad \begin{cases} A = \Sigma X = 0, \\ B = \Sigma Y = 0, \\ C = \Sigma Z = 0; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} L = \Sigma(yZ - zY) = 0, \\ M = \Sigma(zX - xZ) = 0, \\ N = \Sigma(xY - yX) = 0. \end{cases}$$

Les conditions (1) expriment que le polygone des forces est fermé, c'est-à-dire que ces forces se réduisent à un couple; et en vertu des relations (2), le bras de levier de ce couple est nul.

Lorsque les forces sont complanes, les conditions précédentes se réduisent à trois; on a en effet, en supposant les forces situées dans le plan xoy

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Enfin, quand toutes les forces appliquées au solide sont parallèles, on n'obtient encore que trois conditions d'équilibre qui s'écrivent

$$C = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0,$$

après avoir choisi Oz parallèle aux forces.

103. *Quand on réduit les forces appliquées à un solide à deux,* R *et* S, *si les forces telles que* R *passent par un même point* O, *les forces associées* S *sont toutes situées dans un plan contenant le point* O ; *réciproquement, si les forces* S *sont situées dans un même plan* P, *les forces* R *sont concourantes en un point du plan* P.

En effet, soient les deux systèmes (R, S), (R′, S′). Ils sont équivalents comme produisant chacun le même effet que l'ensemble des forces appliquées au solide. Nous aurons donc en prenant les moments par rapport à un axe quelconque

$$(1) \qquad m^t R + m^t S = m^t R' + m^t S'.$$

Ceci posé, supposons R et R′ concourantes en O ; traçons une droite quelconque (Δ) passant par O et s'appuyant sur S ; en vertu de (1), le moment de S′ par rapport à (Δ) sera nul, par conséquent S′ sera dans un plan avec chacune des droites (Δ). Or, pour qu'il en soit ainsi il faut que S′ appartienne au plan (O, S) car elle ne passe pas par O, R′ et S′ n'étant pas concourantes. Supposons maintenant R et R′ parallèles. Par un point quelconque de S menons la parallèle (Δ) à R, (Δ) et S déterminent un plan P, puisque S n'est pas parallèle à R ; comme précédemment, le moment de S′ par rapport à (Δ) sera nul, par suite comme la force S′ n'est pas parallèle à R′, elle rencontrera toutes les droites telles que (Δ) et appartiendra par suite au plan P. Ce plan est d'ailleurs parallèle à la direction commune des forces R.

Réciproque. — Soient les forces S, S′ situées dans le plan P, et O la trace de R sur ce plan. Traçons dans le plan P une droite quelconque (Δ) passant par O, le moment de R′ par rapport à chaque droite (Δ) est nul ; par conséquent, puisque R′ n'est pas située dans le plan P elle passe forcément par le point O.

Enfin si R était parallèle au plan P, en prenant les moments par rapport à une parallèle quelconque (Δ) à R située dans P on verrait que R′ est parallèle à R.

104. *Des forces en nombre quelconque appliquées à un solide et situées dans un même plan peuvent toujours se réduire à trois dirigées suivant les côtés d'un triangle donné.*

Considérons dans un plan la force A_1F_1 et le triangle XYZ ; nous pouvons décomposer F_1 en deux autres forces dirigées suivant XA_1 et YA_1. En faisant la même opération pour toutes les forces appliquées au solide, nous obtiendrons des forces concourantes en X et d'autres concourantes en Y, les premières pourront d'ailleurs se décomposer suivant les côtés XY, XZ et les secondes suivant YX, YZ de sorte que nous obtiendrons bien finalement trois forces dirigées X_1, Y_1, Z_1 suivant les droites YZ, XZ, XY.

Corollaire. — Pour que les forces données c'est-à-dire les trois forces X_1, Y_1, Z_1 soient en équilibre il faut et il suffit

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0, \qquad Z_1 = 0.$$

Il suffit pour le démontrer de prendre les moments par chacun des sommets du triangle de ces forces.

105. *Des forces en nombre quelconque appliquées à un solide peuvent toujours se réduire à six dirigées suivant les arêtes d'un tétraèdre donné.*

Si XYZT est le tétraèdre donné, on réduira les forces à trois appliquées aux sommets X, Y, Z, puis on décomposera chacune de celles-ci en trois autres dirigées suivant les arêtes qui aboutissent à son point d'application.

Corollaire. — Pour que ces six forces constituent un système en équilibre il faut et il suffit qu'elles soient séparément nulles. Pour le démontrer il suffit de prendre les moments par rapport à chacune des arêtes du tétraèdre.

106. *Axe central.*

Considérons des forces quelconques appliquées à un solide ; formons le polygone de ces forces, et soit $\overline{AB}$ le segment qui

joint le point de départ au point d'arrivée. Adoptons trois axes rectangulaires O,xyz dont l'un Oz est parallèle à $\overline{AB}$; transportons les points d'application des forces aux traces de leurs droites d'action avec le plan Oxy ; enfin décomposons chacune d'elles suivant les directions des axes.

La somme des projections des forces étant égale à celle de leur contour ou de $\overline{AB}$, nous aurons en projetant sur les axes Ox, Oy, Oz

$$X_1 + X_2 + \ldots\ldots = 0,$$

$$Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots = 0,$$

$$Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots = \overline{AB}.$$

Les forces données sont donc équivalentes à une force $\overline{AB}$ résultante des forces parallèles Z_1, Z_2, ... et au système $(S) = (X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots)$ contenu dans le plan Oxy.

Or, la somme des projections des forces du système (S) étant nulle sur Ox, Oy, ce système se réduit à un couple (C).

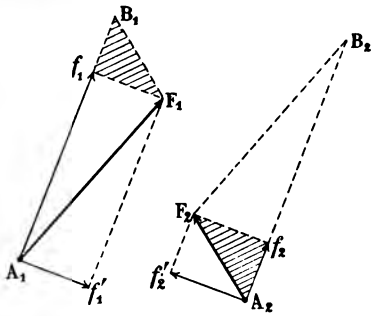
Les forces données sont donc équivalentes à $\overline{AB}$ et au couple (C). D'ailleurs le couple (C) est situé dans le plan Oxy, son axe est donc parallèle à Oz et comme d'autre part on peut, sans changer l'effet de ce couple, transporter son axe parallèlement à lui-même on pourra l'amener en coïncidence avec la droite (Δ) suivant laquelle agit $\overline{AB}$. C'est cette droite (Δ) qui porte le nom d'*axe central* du système des forces données.

On voit aisément que si l'on fait la réduction des forces données à une et à un couple, pour tous les points de (Δ) la force et l'axe du couple coïncideront en direction avec (Δ).

107. *Des forces appliquées à un solide étant réduites à deux, construire l'axe central.*

Les forces étant F_1 et F_2 appliquées aux traces A_1 et A_2 de leurs droites d'action avec un plan perpendiculaire au seg-

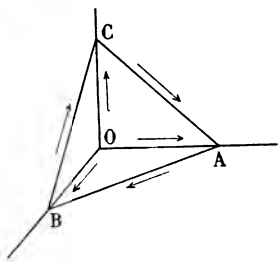
ment qui ferme leur contour, menons F_1B_1 égale et parallèle à A_2F_2, puis F_2B_2 égale et parallèle à A_1F_1. Les plans (A_1F_1, F_1B_1) et (A_2F_2, F_2B_2) sont parallèles.



Ceci posé, décomposons F_1 suivant A_1B_1 et la perpendiculaire à A_1B_1 située dans le plan de ces deux droites, nous obtiendrons comme composantes A_1f_1 et A_1f_1'; on décomposera pareillement A_2F_2 en A_2f_2 et A_2f_2'. En vertu de l'égalité des triangles $F_1B_1f_1$ et $F_2B_2f_2$, f_1' et f_2' forment un couple dont le plan est perpendiculaire aux parallèles A_1B_1, A_2B_2; quant aux forces f_1 et f_2 qui sont parallèles, elles se composeront pour donner une résultante dont la droite d'action est précisément l'axe central.

108. *On donne un tétraèdre* OABC *dont l'angle trièdre* O *est trirectangle. Suivant les arêtes du tétraèdre sont appliquées six forces représentées par* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. *Effectuer la réduction au point* O (*)

Les forces $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ admettent une résultante $\overline{OR}$ représentée en grandeur et direction par la diagonale du parallélépipède construit sur OA, OB et OC. D'autre part, les forces $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ se réduisent à un couple dont l'axe dirigé perpendiculairement au plan ABC a pour longueur le moment du couple, c'est-à-dire le double de la surface du triangle ABC.



(*) *Questions de Mécanique*, par Antomari et Laisant. Paris, Nony.

Ce couple peut d'ailleurs être transporté parallèlement à lui-même au point O et les éléments de la réduction au point O sont ainsi complètement connus.

109. *Lieu des axes de l'espace passant par un point donné* O *et tels que la somme des projections sur chacun d'eux, d'un système quelconque de forces ait même valeur* p.

Soient $\overline{AB}$ la résultante géométrique du contour polygonal des forces et un axe OD répondant à l'hypothèse de l'énoncé. Menons Ox parallèle à $\overline{AB}$ et soit $\widehat{xOD} = \alpha$.

La somme des projections des forces étant égale à la projection de $\overline{AB}$, nous aurons

$$\overline{AB} \cos \alpha = p,$$

d'où

$$(1) \qquad \cos \alpha = \frac{p}{\overline{AB}} = \text{const.}$$

Les axes OD faisant avec Ox l'angle constant α sont les génératrices d'un cône (Γ) de révolution autour de Ox et d'ouverture 2α.

110. *Des forces quelconques appliquées à un solide peuvent toujours se réduire à trois d'égale intensité et rectangulaires.*

Pour que le cône (Γ) soit capable d'un trièdre trirectangle, c'est-à-dire pour que l'on puisse trouver un système de trois génératrices formant un trièdre trirectangle il faut (2α étant son ouverture) que l'on ait $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ceci s'obtient sans difficulté. Choisissons donc dans la relation (1) du n° 109, p de façon que l'on ait

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{p}{\overline{AB}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad p = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{3},$$

on pourra alors trouver dans le cône (Γ) trois génératrices Og, Og', Og'' rectangulaires.

Ceci posé, décomposons chacune des forces données en trois autres parallèles à ces génératrices ; les composantes parallèles à Og auront une résultante d'intensité $\frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{3}$, et il en sera de même pour celles qui sont parallèles à Og' et à Og''. Cette réduction n'est d'ailleurs pas unique ; en effet, si un cône de révolution admet un système triple de génératrices rectangulaires, il en admet une infinité.

111. *Démontrer, en partant des conditions analytiques d'équilibre d'un corps solide que trois forces qui se font équilibre sont nécessairement complanes.*

Nous pouvons toujours choisir trois axes rectangulaires $O.xyz$ tels que les points d'application des forces soient l'un à l'origine, le second sur Ox et le troisième dans le plan Oxy ; il viendra alors pour les coordonnées de ces points

$$(0, 0, 0); \qquad (x', 0, 0); \qquad (x, y, 0).$$

Par suite si nous introduisons ces données particulières dans les six équations d'équilibre,

$$\Sigma(xY - yX) = 0, \qquad \Sigma X = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \qquad \Sigma Y = 0,$$
$$\Sigma(zX - xZ) = 0; \qquad \Sigma Z = 0;$$

il viendra

$$xY - yX + x'Y' = 0, \qquad X + X' + X'' = 0,$$
$$(1) \qquad yZ = 0, \qquad Y + Y' + Y'' = 0,$$
$$(2) \qquad -xZ - x'Z' = 0; \qquad (3) \qquad Z + Z' + Z'' = 0.$$

Des équations (1), (2) et (3) nous tirons :

$$Z = Z' = Z'' = 0.$$

Par conséquent les projections des forces sur Ox sont nulles et ces forces sont situées dans le plan Oxy.

112. *Quatre forces étant en équilibre, toute droite qui rencontre trois d'entre elles rencontre la quatrième ou lui est parallèle.*

En effet, soit D une droite quelconque, mais rencontrant F, F′, F″; les quatre forces étant en équilibre, nous pouvons fixer la droite D; alors F, F′, F″ n'auront aucun effet et d'après un axiome, pour que l'équilibre existe, il faudra que la force F‴ et l'axe D soient dans un même plan.

Plus généralement, on démontrerait qu'étant données n forces en équilibre, s'il existe une droite rencontrant $n-1$ d'entre elles, cette droite rencontre la $n^{\text{ième}}$ ou lui est parallèle.

113. *Une force* $\overline{AB}$ *d'intensité constante pivote autour de son point d'application* A. *Trouver la courbe que doit décrire son extrémité* B *pour que le moment de cette force par rapport à un axe donné conserve la même valeur.*

Soit un plan (P) perpendiculaire à l'axe des moments OZ; si $\overline{ab}$ est la projection de $\overline{AB}$ sur ce plan, nous avons

$$\mathrm{m}^{t}_{oz}\,\overline{AB} = \mathrm{m}^{t}_{z}\,\overline{ab} = 2\ \text{surf.}\ Oab.$$

Par hypothèse il vient donc

$$2\ \text{surf.}\ Oab = Oa.bb' = k,$$

k étant une constante donnée positive ou négative et bb' la hauteur issue de b. Or, quand AB pivote autour de A, Oa reste fixe, par suite

$$bb' = \frac{k}{Oa} = \text{const.}$$

Le lieu du point b sera donc une parallèle δ à Oa tracée d'un côté ou de l'autre de Oa suivant le signe de k. Par conséquent le point B appartiendra au plan (Q) parallèle à Oz mené par δ et comme il est situé sur la sphère de centre A et de rayon AB, il décrira la circonférence section de cette sphère par le plan (Q).

114. *Composer les forces représentées en grandeur et direction par les côtés* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{LA}$ *d'un polygone plan ou gauche.*

(*École navale.*)

Soit O un point quelconque de l'espace. Appliquons à ce point deux forces directement opposées Ob, Ob_1 égales et parallèles à $\overline{AB}$.

La force $\overline{AB}$ pourra être remplacée par la force Ob, et le couple $(Ob_1, \overline{AB})$.

En répétant cette opération pour chacun des côtés, nous substituerons aux forces données les forces concourantes Oa_1, Ob_1, ..., Ol_1 et les couples $(Oa, \overline{LA})$, $(Ob, \overline{AB})$, ...

Or les forces concourantes se font équilibre, car le polygone de ces forces qui est précisément le polygone donné est fermé; et tous les couples se composent en un seul; donc, les forces représentées en grandeur et direction par les côtés d'un polygone supposé parcouru dans un même sens forment un couple.

Dans le cas particulier où le moment de ce couple sera nul, il y aura équilibre.

115. *Étant donné un polygone plan, convexe ou non* $A_1A_2 \ldots A_n$, *trouver la résultante des forces représentées en grandeur et direction par* $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ et $\overline{A_1A_n}$.

La somme des projections des forces sur une perpendiculaire à A_1A_n est nulle, et sur A_1A_n est égale à $2\overline{A_1A_n}$; donc la résultante a pour intensité $2A_1A_n$, elle est parallèle à A_1A_n et dirigée dans le même sens que ce segment.

Pour trouver sa position, c'est-à-dire calculer sa distance δ au côté A_1A_n, nous prendrons les moments par rapport au point A_1, il viendra

$$2A_1A_n.\delta = m^t\, A_1A_2 + m^t\, A_2A_3 + \cdots + m^t\, A_{n-1}A_n,$$

d'où

$$\delta = \frac{\Sigma \text{ surf. tr. } A_1A_iA_{i+1}}{A_1A_n},$$

Σ désignant une somme algébrique, car on devra donner aux

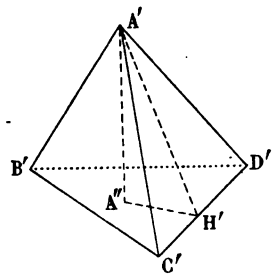
surfaces des triangles $A_1A_iA_{i+1}$ les signes des moments des segments A_iA_{i+1}.

Cas particuliers. — 1° Supposons que le polygone soit un *triangle*, la résultante des forces A_1A_2, A_2A_3, et A_1A_3 a pour intensité $2A_1A_3$, elle passe d'ailleurs par les milieux des côtés A_1A_2, A_3A_2 et est dirigée dans le même sens que A_1A_3.

2° Le polygone est un *parallélogramme* $A_1A_2A_3A_4$, la résultante des forces A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 et A_1A_4 est dirigée suivant A_2A_3 et a pour intensité $2A_2A_3$.

116. *Quatre forces appliquées aux centres de gravité des faces d'un tétraèdre perpendiculairement au plan de chacune de ces faces, proportionnelles à ces faces et dirigées toutes vers l'extérieur ou l'intérieur du solide se font équilibre.*

Le tétraèdre donné ABCD et celui qui a pour sommets les centres de gravité A′, B′, C′, D′ de chacune de ses faces sont homothétiques.



Le centre d'homothétie est le centre de gravité du volume ABCD et le rapport d'homothétie 3.

Par conséquent les forces sont appliquées aux sommets du tétraèdre A′B′C′D′, dirigées suivant ses hauteurs, toutes vers les faces correspondantes ou en sens contraire et proportionnelles à ces faces.

Soient a', b', c', d' les aires des faces et ka', kb', kc' les forces.

Ceci posé, la somme des projections des forces sur la hauteur A′A″ s'écrit

$$ka' - kb' \cos \overline{C'D'} - kc' \cos \overline{B'D'} - kd' \cos \overline{B'C'},$$

et cette somme est nulle, car la face a' est égale à la somme des projections des autres faces sur son plan.

Donc la somme des projections des forces sur chacune des hauteurs, c'est-à-dire sur trois axes formant un trièdre est nulle.

Calculons maintenant les moments par rapport à l'arête C'D'.

Deux des forces rencontrant cet axe ont un moment nul, et nous avons

$$m^t\, ka' = ka'.A''H = ka'.A'A''.\ \text{cotg}\ \overline{C'D'},$$

ou bien, si nous appelons V le volume du tétraèdre A'B'C'D',

$$m^t\, ka' = 3k.V.\ \text{cotg}\ \overline{C'D'}.$$

Nous obtiendrons pareillement

$$m^t\, kb' = -3k.V.\ \text{cotg}\ C'D'.$$

La somme des moments des forces par rapport aux arêtes du solide, c'est-à-dire par rapport à trois droites formant un trièdre, est nulle, et ces forces se font équilibre.

Remarque I. — Ce théorème peut s'étendre à un polyèdre, il suffit pour le démontrer de le décomposer en tétraèdres et d'appliquer au centre de gravité de chacune des faces auxiliaires deux forces proportionnelles à cette face normales à son plan et directement opposées.

Remarque II. — De ce qu'il existe un système de quatre forces dirigées suivant les hauteurs d'un tétraèdre et se faisant équilibre, il résulte que toute droite rencontrant trois des hauteurs rencontre la quatrième.

EXERCICES

82. — Lorsque quatre forces se font équilibre, si trois d'entre elles sont parallèles à un plan, la quatrième est parallèle à ce plan.

83. — On peut généralement réduire toutes les forces qui solli-

citent un solide à deux rectangulaires dont l'une passe par un point donné.

84. — Des forces appliquées à un solide peuvent toujours se réduire et d'une infinité de manières à deux faisant entre elles un angle donné.

85. — Etant donné un cube, on considère trois des arêtes non situées deux à deux dans le même plan et les forces représentées en grandeur et direction par ces arêtes. Déterminer l'axe central.

86. — Des forces en nombre quelconque appliquées à un solide, dans un plan, peuvent toujours être remplacées par deux autres, l'une agissant suivant une droite donnée et l'autre passant par un point donné hors de la droite.

En supposant par exemple, six forces égales appliquées aux sommets d'un hexagone régulier, les trois premières aux sommets de rang impair dans le prolongement des rayons, et les trois autres aux sommets de rang pair, suivant le périmètre et toujours dans le même sens, on demande de remplacer ces six forces par deux autres équivalentes, l'une appliquée au centre du polygone et l'autre suivant l'un des côtés.

(*Conc. acad. Clermont, 1877.*)

87. — Réduire les forces appliquées à un solide à deux d'intensités données.

88. — Prouver que l'axe central est le lieu des points de l'espace pour lesquels le couple résultant est minimum.

89. — Réduire les forces appliquées à un solide à deux dont l'une soit parallèle à une direction donnée.

90. — Trois forces étant parallèles à un plan, trouver la condition pour que ce système admette une résultante.

91. — Prouver que, de quelque façon qu'on réduise à deux les forces appliquées à un solide, le volume du tétraèdre construit sur ces deux forces est constant.

92. — Etant données des forces quelconques appliquées à un solide, on appelle droite de *moment nul* toute droite de l'espace par rapport à laquelle la somme des moments des forces est nulle...

Cette définition étant rappelée, démontrer que toutes les droites de moment nul, relativement à des forces données, qui passent par un point donné sont situées dans un même plan.

CHAPITRE VI

ÉQUILIBRE DU SOLIDE GÊNE

117. *Solide ayant un point fixe.* — Pour qu'un tel solide soit en équilibre, il faut et il suffit que les forces qui le sollicitent, admettent une résultante passant par le point fixe. Cette force sera la pression exercée sur le point fixe.

Analytiquement, on choisira trois axes rectangulaires passant par le point fixe O; et, à condition d'introduire la réaction R du point O, il restera à écrire les conditions d'équilibre d'un solide libre.

Les trois équations des moments exprimeront l'équilibre du solide gêné et les trois autres définiront R en grandeur, direction et sens.

118. *Solide ayant deux points fixes.* — Pour que le solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe fixe soit nulle. Analytiquement, on pourra prendre trois axes rectangulaires dont l'un contiendra les points fixes A_1, A_2; ces points auront alors pour coordonnées $(0, 0, a_1)$, $(0, 0, a_2)$. On introduira les réactions (inconnues) (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) de ces points et on écrira les conditions d'équilibre des forces extérieures et des deux forces de liaison; on obtiendra ainsi :

$$(1) \quad \Sigma X + X_1 + X_2 = 0, \quad \Sigma Y + Y_1 + Y_2 = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0;$$

$$(2) \quad L - a_1 Y_1 - a_2 Y_2 = 0, \quad M + a_1 X_1 + a_2 X_2 = 0, \quad N = 0.$$

Il est important de remarquer que les 5 premières équations sont insuffisantes pour faire connaître les réactions.

Ceci tient à l'hypothèse du solide géométrique. Pour les solides naturels ces réactions sont bien déterminées, et on peut les calculer en tenant compte alors de la déformation du solide.

La condition $N = 0$ exprime précisément l'équilibre des forces données.

119. *Solide reposant sur un plan poli.* — Pour que les forces extérieures tiennent le solide en équilibre, il faut et il suffit qu'elles admettent une résultante normale au plan, perçant le plan à l'intérieur du polygone d'appui et dirigée de façon à maintenir l'adhérence du corps au plan.

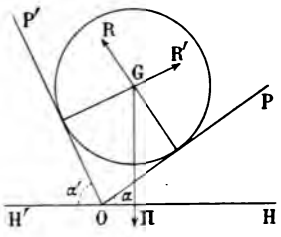
Les conditions d'équilibre étant réalisées, si R est la résultante des forces, la réaction du plan lui sera égale et directement opposée.

Dans le cas où les points d'appui formeront un triangle ABC, R pourra se décomposer en trois autres forces normales au plan, appliquées respectivement en A, B et C et parfaitement déterminées; ce seront les pressions exercées sur le plan en ces points. Si le nombre des points d'appui est supérieur à 3, la statique du solide géométrique laisse partiellement indéterminées les réactions du plan. Pour les solides naturels, ces réactions seront déterminées en adjoignant aux conditions précédentes celles que l'on obtient en exprimant l'équilibre ***intérieur*** du solide.

Nous nous bornerons à ces trois espèces de liaison et nous ferons remarquer que d'une façon générale on pourra ramener l'étude de l'équilibre du solide *géné* à celle de l'équilibre du solide *libre* en ayant soin d'introduire préalablement les forces de liaison.

120. *Une sphère repose sur deux plans inclinés. Calculer les pressions qu'elle exerce sur chacun de ces plans.*

Si nous supposons les plans parfaitement polis, il faut nécessairement pour l'équilibre que les plans inclinés P, P′ se coupent suivant une horizontale.



Ceci remarqué, le poids Π de la sphère et les réactions R, R′ des plans inclinés concourent au centre du solide et les formules de Stevin nous donneront comme conditions d'équilibre

$$\frac{\Pi}{\sin(\alpha+\alpha')} = \frac{R'}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha'},$$

d'où nous tirons

$$R = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')}\,\Pi, \qquad R' = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}\,\Pi.$$

121. *En quel point de la surface d'un prisme triangulaire*

oblique peut-on suspendre par un fil un corps pour que sous l'action de la pesanteur les arêtes latérales prennent une direction d'équilibre parallèle ou perpendiculaire à celle du fil ?

(*Concours académique de Lyon, 1879.*)

1° La parallèle aux arêtes menée par le centre de gravité du prisme coïncide avec la direction du fil ; or, cette droite coupe le solide aux centres de gravité des deux bases, c'est donc en l'un quelconque de ces points que l'on devra fixer une extrémité du fil.

2° Le fil étant perpendiculaire aux arêtes et sa direction contenant le centre de gravité G du solide, devra être fixé en un point quelconque du périmètre de la section droite du prisme qui contient le point G.

122. *Une sphère repose sur les trois faces d'un trièdre trirectangle ; évaluer les pressions exercées sur ces plans.*

Soit le trièdre trirectangle (O, xyz) et α, β, γ les angles de la verticale ascendante avec les arêtes Ox, Oy, Oz ; enfin représentons par P_x, P_y, P_z, les réactions des faces Oyz, Ozx, Oxy et Π le poids de la sphère, nous aurons en projetant successivement sur Ox, Oy et Oz

$$P_x - \Pi \cos \alpha = 0, \qquad P_y - \Pi \cos \beta = 0, \qquad P_z - \Pi \cos \gamma = 0,$$

d'où

$$P_x = \Pi \cos \alpha,$$
$$P_y = \Pi \cos \beta,$$
$$P_z = \Pi \cos \gamma.$$

Pour que l'équilibre de la sphère soit possible, il faut et il suffit que ces réactions, c'est-à-dire $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ soient positifs.

Or, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ sont précisément les coordonnées du point de la verticale ascendante du point O situé à la distance unité du sommet O, par conséquent cette verticale devra être contenue à l'intérieur de l'angle trièdre.

123. *On accole un hémisphère et un cylindre droit de même rayon par leurs bases. Que se passe-t-il si l'on suppose que ce solide repose par la surface de l'hémisphère sur un plan horizontal et qu'on vienne à le déranger de sa position d'équilibre ? Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que l'équilibre soit stable, indifférent ou instable ?*

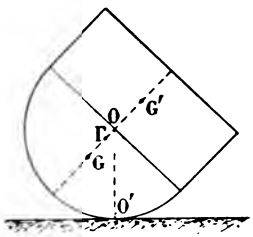
(*Saint-Cyr, 1889.*)

Soient O le centre de l'hémisphère, O′ sa projection sur le plan horizontal, G, G′ les centres de gravité de l'hémisphère et du cylindre, enfin Γ celui du système des deux solides.

Nous avons

$$OG = \frac{3}{8}R, \qquad OG' = \frac{h}{2}.$$

Comptons $O\Gamma = x$ positivement dans le sens OG et appliquons le théorème des moments par rapport au point O, il viendra



$$\frac{3}{8}R\,\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{h}{2}\pi R^2 h$$
$$= x\left(\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 h\right),$$

d'où

$$x = \frac{3(R^2 - 2h^2)}{4(2R + 3h)}.$$

La stabilité de l'équilibre dépend de la position, par rapport à O′, de la projection de Γ sur le plan horizontal, ou bien encore du signe de x, nous aurons donc en résumant

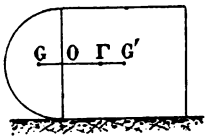
$$h < \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad \text{stabilité},$$

$$h = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad \text{indifférence},$$

$$h > \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad \text{instabilité}.$$

124. *Même question, en supposant que le solide repose sur le plan par la surface latérale du cylindre.*

Dans ce cas il y aura stabilité quand Γ sera à droite du point O c'est-à-dire pour $h > \frac{R\sqrt{2}}{2}$.



Quand Γ coïncidera avec le point O, le solide restera en équilibre sur le plan, soit qu'il le touche par la surface du cylindre soit qu'il repose par la surface de l'hémisphère.

Enfin quand on aura $h < \frac{R\sqrt{2}}{2}$, on ne pourra le placer en équilibre qu'en le faisant réposer par l'hémisphère.

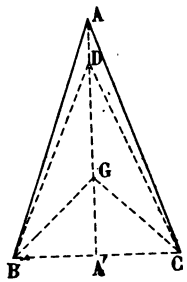
125. *On donne un triangle isocèle* ABC *pesant dans lequel on mène la médiane* AA'. *Ce triangle est supporté par trois pieds placés l'un en* B, *l'autre en* C *et le troisième en un point* D *qui est sur la médiane au* $\frac{1}{6}$ *à partir du sommet. Pression exercée en chacun des points* B, C *et* D.

(*Saint-Cyr, 1889.*)

Supposons que le poids de ABC soit représenté par sa surface S. Nous nous proposons de calculer les composantes β, γ, δ de ce poids, connaissant leurs points d'application B, C, D.

Or, nous avons

$$(1)\quad \frac{\beta}{\text{surf. DGC}} = \frac{\gamma}{\text{surf. DGB}} = \frac{\delta}{\text{surf. BGC}} = \frac{S}{\text{surf. BDC}}.$$



Mais

$$\text{surf. BGC} = \frac{S}{3}, \qquad \text{surf. BCD} = \frac{5S}{6},$$

d'où

$$2\ \text{surf. BGD} = \frac{5S}{6} - \frac{S}{3} = \frac{S}{2},$$

et par suite

$$\text{surf. BGD} = \text{surf. CGD} = \frac{S}{4}.$$

Remplaçons dans (1) nous obtiendrons

$$\frac{\beta}{\frac{S}{4}} = \frac{\gamma}{\frac{S}{4}} = \frac{\delta}{\frac{S}{3}} = \frac{S}{\frac{5S}{6}},$$

d'où nous tirons finalement

$$\beta = \gamma = \frac{3}{10}\,S, \qquad \delta = \frac{2}{5}\,S.$$

Autre méthode. — Dans ce cas particulier il est plus simple d'effectuer directement la décomposition du poids du triangle.

Décomposons le poids S appliqué en G en deux δ, α' appliqués en D et A', comme $GD = \frac{3}{2}GA'$, nous aurons

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\alpha'}{3} = \frac{S}{5},$$

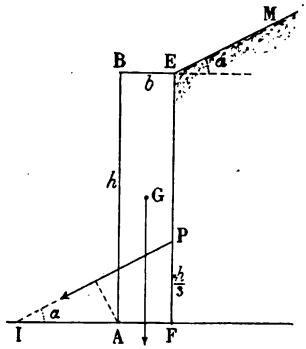
d'où $$\delta = \frac{2}{5}\,S, \qquad \alpha' = \frac{3}{5}\,S.$$

Enfin A' étant milieu de BC, α' se décomposera en deux autres $\beta = \gamma = \frac{3}{10}\,S$, appliqués aux sommets B et C.

126. *La section droite d'un mur est un rectangle* ABEF *dont on connaît la hauteur verticale* $EF = h$, *et dont il faut déterminer la base* $AF = b$, *épaisseur du mur. Celui-ci qui a une densité connue* D, *est destiné à soutenir un massif terreux* MEF, *ayant également une densité connue* D' *et dont la surface supérieure* EM *fait au-dessus de l'horizon un angle donné* α, *le plus grand sous lequel la matière ne s'éboule pas. Le massif considéré tend à renverser le mur en le faisant tourner autour de son arête projetée en* A; *sa poussée parallèle au talus supérieur* ME, *est appliquée en* P, *au tiers de la hauteur* h, *et égale par mètre de longueur du mur à* $D'\frac{h^2}{2}\cos\alpha$. *Cela posé, on demande quelle est l'épaisseur* b, *strictement nécessaire, qu'il faut donner au mur pour que son poids l'empêche de se renverser. Effectuer le calcul, ou évaluer le rapport* $\frac{b}{h}$, *dans le cas usuel où :* $\alpha = 45°$ *et* $\frac{D}{D'} = \frac{3}{2}$.

(*Conc. acad. Douai, 1876.*)

Pour que le mur ne soit pas renversé il faut que la résultante de la poussée du massif et du poids du mur perce la base du mur à l'intérieur du rectangle d'appui. Le mur sera sur le point d'être culbuté quand cette résultante passera par le point A, alors la somme des moments par rapport à ce point des deux forces considérées sera nulle et nous aurons



$$\text{poids du mur} \times \frac{b}{2}$$
$$= \text{poussée} \times \text{AI} \sin \alpha,$$

mais nous avons

poids du mur $= bh\text{D}$; poussée $= \text{D}' \dfrac{h^2}{2} \cos \alpha$;

$$\text{AI} = \frac{h}{3} \operatorname{cotg} \alpha - b;$$

par conséquent nous obtiendrons en substituant

$$(1) \qquad \frac{\text{D}}{\text{D}'} \left(\frac{b}{h}\right)^2 + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{b}{h}\right) - \frac{\cos^2 \alpha}{3} = 0.$$

La racine positive de cette équation donnera le rapport $\dfrac{b}{h}$.

Dans le cas usuel où l'on a : $\alpha = 45^0$, $\dfrac{\text{D}}{\text{D}'} = \dfrac{3}{2}$, l'équation (1) s'écrit

$$3\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \frac{b}{h} - \frac{1}{3} = 0,$$

et donne

$$b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{6} h.$$

b est alors le tiers du côté du décagone régulier convexe inscrit dans la circonférence de rayon h.

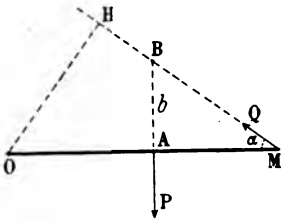
127. *On considère une barre rigide non pesante* OAM, *mobile autour du point* O; *on veut maintenir cette barre horizontale en*

la chargeant d'un poids P *appliqué en* A, *et en faisant agir à l'extrémité* M *une force* Q *dont la direction passe par un point* B *donné sur la verticale du point* A.

1° *On donne* OA, OM *et* AB, *calculer* Q.

2° *Quelle est la longueur qu'il faut donner à* OM *pour que* Q *ait la plus petite valeur possible?*

1° Pour que les forces P et Q se fassent équilibre il faut que leur résultante passe par le point fixe O. Nous écrirons donc que la somme des moments de ces forces par rapport au point O est nulle, et il viendra après avoir posé $OA = a$, $OM = m$, $AB = b$:



$$aP = OH.Q,$$

ou bien

$$aP = mQ \sin \alpha = \frac{mb}{\sqrt{(m-a)^2 + b^2}} Q,$$

d'où nous tirons

$$Q = \frac{a\sqrt{(m-a)^2 + b^2}}{mb} P.$$

2° Q est minimum avec Q^2 ou dans les mêmes conditions que

$$\frac{(m-a)^2 + b^2}{m^2}.$$

La dérivée de cette fraction s'écrit

$$\frac{2}{m^3}(am - a^2 - b^2)$$

et nous voyons qu'elle est négative quand m varie de a à $\frac{a^2 + b^2}{a}$ et s'annule pour cette dernière valeur, par conséquent Q est minima pour $m = \frac{a^2 + b^2}{a}$.

OM sera donc l'hypoténuse du triangle rectangle dont OB est un des côtés de l'angle droit et AB la hauteur.

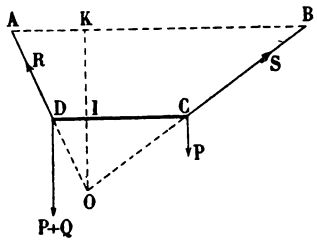
Ce résultat s'obtient géométriquement en remarquant que le

produit Q.OH étant constant, Q sera minima quand OH sera maxima. Le lieu de H étant la circonférence de diamètre OB, OH aura la plus grande valeur quand cette perpendiculaire coïncidera avec OB.

128. *Une barre solide* CD, *de longueur* l *et de poids* 2P, *est suspendue par deux fils* AD, BC, *de longueurs* a, b, *attachés à ses extrémités et fixés en deux points* A, B *situés à la même hauteur au-dessus du sol et distants entre eux de* d. *Quel poids faut-il suspendre à l'une des extrémités de la barre pour que dans sa position d'équilibre elle soit horizontale ?*

(*Bacc. enseign. spécial, Rennes, 1893.*)

Supposons $b > a$, la surcharge devra être placée en D comme le justifie d'ailleurs la discussion.



Soit O le point d'intersection des directions des fils AD, BC et abaissons la perpendiculaire OIK à CD et à AB.

Si nous prenons les moments par rapport à O, les tensions R, S des fils auront des moments nuls ; nous devrons avoir pour l'équilibre

$$m^t P + m^t (P + Q) = 0,$$

(le poids 2P de la barre ayant été remplacé par deux poids P appliqués aux extrémités), ou bien

$$(1) \qquad (P + Q).ID = P.IC.$$

Mais nous avons

$$(2) \qquad \overline{IC}^2 - \overline{ID}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OD}^2;$$

d'autre part

$$\frac{OD}{OD + a} = \frac{OC}{OC + b} = \frac{l}{d},$$

d'où nous tirons

$$OD = \frac{al}{d - l}, \qquad OC = \frac{bl}{d - l};$$

et (2) deviendra

$$\overline{IC}^2 - \overline{ID}^2 = \frac{(b^2 - a^2)l^2}{(d-l)^2}. \tag{3}$$

Enfin, nous pouvons écrire en vertu de (1)

$$\frac{ID}{P} = \frac{IC}{P+Q} = \frac{l}{2P+Q} = \frac{IC - ID}{Q}.$$

Par conséquent si nous remplaçons IC et ID dans (3), nous obtiendrons :

$$\frac{Q}{2P+Q} = \frac{b^2 - a^2}{(d-l)^2},$$

d'où nous tirons

$$Q = \frac{2(b^2 - a^2)}{(d-l)^2 - b^2 + a^2} P.$$

Or Q doit être positif, par suite, pour que l'équilibre soit possible, il faudra

$$a^2 < b^2 < a^2 + (d-l)^2.$$

Si $b = a$, $Q = 0$ et l'équilibre horizontal a lieu uniquement sous l'action du poids de la barre. Au contraire quand on a $b^2 = a^2 + (d-l)^2$, l'équilibre est impossible, d'ailleurs nous trouvons pour Q une valeur infinie.

129. *On donne une série de masses pesantes dont les centres de gravité sont distribués le long d'une droite* AB *mobile autour d'un de ses points* C *supposé fixe. La tige est soutenue en* A *par un fil qui passe sur un point* P *situé sur la verticale de* C *et dont l'extrémité supporte un poids de masse* μ. *Déterminer et discuter les conditions d'équilibre.*

(*Agrégation, 1874.*)

Prenons deux axes rectangulaires Cx, Cy, l'un horizontal, l'autre vertical ascendant ; P aura pour coordonnées $(0, p)$.

Adoptons sur la droite AB une direction et appelons θ son angle avec Cx, soient enfin $m_1, m_2, \ldots m_i$ les masses et $r_1, r_2, \ldots r_i$ leurs distances algébriques à l'origine C.

Pour que la barre soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments par rapport à C des forces qui la sollicitent soit nulle.

Or, en faisant usage de l'expression $xY - yX$ du moment, nous aurons

$$m^t m_1 = -r_1 \cos\theta . m_1,$$

d'où $$m^t m_1 + m^t m_2 + \cdots + m^t m_i = -\cos\theta \Sigma m_i r_i.$$

D'autre part soit $CA = a$; A aura pour coordonnées $a\cos\theta$, $a\sin\theta$; quant à la force μ dirigée suivant AP elle aura pour projections

$$X = \frac{-\mu a\cos\theta}{\overline{AD}} = \frac{-\mu a\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + (p - a\sin\theta)^2}},$$

$$Y = \frac{\mu(p - a\sin\theta)}{\overline{AD}} = \frac{\mu(p - a\sin\theta)}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + (p - a\sin\theta)^2}};$$

et il viendra

$$m^t \mu = \frac{ap\mu\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + (p - a\sin\theta)^2}}.$$

L'équation d'équilibre s'écrira donc (après suppression du facteur $\cos\theta$ qui donne $\theta = \frac{\pi}{2}$ solution évidente)

$$(1) \qquad \Sigma m_i r_i = \frac{ap\mu}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + (p - a\sin\theta)^2}}$$

d'où

$$\sin\theta = \frac{1}{2ap}\left[a^2 + p^2 - \left(\frac{ap\mu}{\Sigma m_i r_i}\right)^2\right].$$

Discussion. — L'équation (1) entraîne en vertu de la détermination positive du radical

$$(2) \qquad ap\Sigma m_i r_i > 0.$$

En outre la condition $-1 < \sin\theta < 1$ se traduit par l'inégalité

$$(3) \qquad S\left(S - \frac{1}{a\mu}\right)\left(S - \frac{1}{p\mu}\right)\left(S - \frac{1}{\Sigma m_i r_i}\right) < 0,$$

après avoir posé

$$2S = \frac{1}{a\mu} + \frac{1}{p\mu} + \frac{1}{\Sigma m_i r_i}.$$

Ces conditions étant réalisées, on obtiendra deux positions d'équilibre θ_1, $\pi - \theta_1$ symétriques par rapport à la verticale.

Application. — Supposons qu'il n'y ait qu'une masse et que l'on ait en outre

$$m_1 = \frac{1}{2}, \qquad r_1 = 2;$$

$$\mu = \sqrt{3}, \qquad p = -1, \qquad a = -1.$$

On obtient alors

$$\sin\theta = -\frac{1}{2},$$

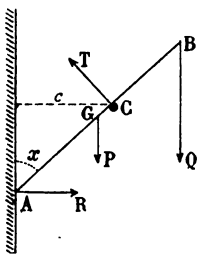
d'où $\qquad \theta_1 = -30^\circ, \qquad \theta_2 = 210^\circ.$

130. *Equilibre d'une tige homogène* AB *qui peut glisser sans frottement sur une cheville horizontale* C, *et dont l'extrémité* A *s'appuie sur un plan vertical parallèle à la cheville et parfaitement poli, l'extrémité* B *supportant un poids* Q. *Calculer les forces de liaison.*

FONTANA, 1802.

Soient $AB = 2a$, c la distance de la cheville au plan vertical, x l'angle de la barre avec la verticale ascendante, P son poids, R la réaction du plan, et T celle de la cheville.

Projetons sur l'horizontale et la verticale et prenons les moments par rapport au point A, il viendra



$$R - T\cos x = 0,$$

$$P + Q - T\sin x = 0,$$

$$Pa\sin x + 2aQ\sin x - \frac{cT}{\sin x} = 0.$$

D'où nous tirons

$$\sin x = \left(\frac{c}{a}\,\frac{P+Q}{P+2Q}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$T = \left[\frac{a}{c}(P+Q)^2(P+2Q)\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$R = \left[\left(\frac{a}{c}\,\frac{P+2Q}{P+Q}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}(P+Q).$$

Pour que l'équilibre soit possible il faut d'abord

$$(1) \qquad \frac{c}{a}\,\frac{P+Q}{P+2Q} < 1.$$

D'autre part, il faut encore que la barre appuie sur la cheville c'est-à-dire que l'on ait $AC < 2a$, ou bien $\frac{c}{\sin x} < 2a$, ou bien encore en remplaçant $\sin x$ par sa valeur

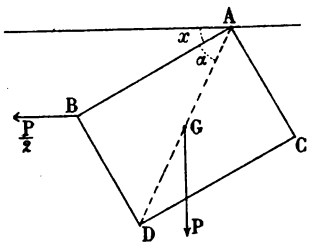
$$\frac{P+Q}{P+2Q} > \frac{c^2}{8a^2}.$$

En rapprochant cette inégalité de (1), on obtient $c < 2a$, condition évidente a priori.

131. *Un cube pesant homogène peut tourner librement autour d'un de ses sommets* A *fixe ; au point* B *qui est le sommet opposé à* A *dans l'une des faces du cube qui aboutit en* A, *on applique une force égale à la moitié du poids du cube et ayant une direction horizontale donnée. Position d'équilibre du cube ; angle de* AB *avec l'horizon ?*

(*Baccalauréat, Caen, 1893.*)

Le cube étant soumis à l'action de trois forces : son poids P, la force horizontale $\frac{P}{2}$ et la réaction du point fixe A, pour qu'il soit en équilibre il faut que ces forces soient complanes. Elles seront donc situées dans le plan diamétral ABG qui sera par suite vertical et parallèle à la direction donnée de la force horizontale $\frac{P}{2}$.



Figurons la section du cube par ce plan, c'est un rectangle ABCD dans lequel $AB = AC\sqrt{2}$. Soit x l'angle de AB avec l'horizon et $\widehat{BAD} = \alpha$, nous aurons en prenant les moments par rapport au point A

$$(1) \qquad \frac{P}{2} \cdot AB \sin x = P.AG. \cos(x+\alpha).$$

Mais $$AG = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, AB,$$

et dans le triangle ABD, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, de sorte qu'en substituant dans (1) il viendra

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2},$$

d'où

$$x = 30^\circ 21' 40'' 30.$$

Calculons la charge R que supporte le point fixe A, pour cela projetons sur l'horizontale et la verticale, nous aurons

$$R_x = \frac{P}{2}, \qquad R_y = P$$

et

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = P\frac{\sqrt{5}}{2};$$

si nous désignons par ω l'angle de R avec l'horizon nous aurons finalement

$$\operatorname{tg} \omega = 2.$$

132. *Une barre pesante* AB *appuie l'une de ses extrémités* A *contre un plan vertical, tandis que l'autre* B *est soutenue par un fil attaché en un point fixe* O *de ce plan.*

Déterminer la position d'équilibre, et calculer les forces de liaison.

Nous prendrons comme inconnue x la distance du point O d'attache du fil à l'extrémité A de la barre et nous poserons

$$OB = 2l, \qquad AB = 2a.$$

Pour qu'il y ait équilibre il faut que le poids P de la barre, la tension T du fil et la réaction R du plan soient concourantes. AB passera donc par le milieu I du fil, et nous aurons

$$\overline{AI}^2 = l^2 - x^2,$$

puis

$$x^2 + 4a^2 = 2\overline{AI}^2 + 2l^2,$$

d'où en éliminant $\overline{AI}^2$,

$$3x^2 = 4(l^2 - a^2),$$

équation qui nous donne

$$x = 2\sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}}.$$

Pour évaluer les forces de liaison R et T il suffit de prendre les moments par rapport aux points O et A, nous obtenons ainsi

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2 - l^2}{l^2 - a^2}}\,P,$$

et

$$T = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3}{l^2 - a^2}}\,P.$$

Nous remarquerons d'ailleurs que l'on a $T^2 = P^2 + R^2$.

Pour que l'équilibre soit possible il faut que x soit réel et R positif, on doit donc avoir

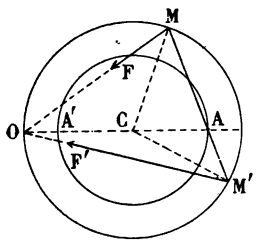
$$a < l < 2a.$$

133. *Deux points matériels non pesants* M *et* M′, *de masses* m *et* m', *invariablement liés entre eux par une tige rigide inextensible et sans masse, et assujettis à se mouvoir sans frottement sur un cercle fixe* C, *sont attirés par un point* O *de ce cercle proportionnellement à leurs masses, et à leurs distances respectives à ce point.*

Déterminer les positions d'équilibre du système et étudier la stabilité.

[*Licence ès sc. math., Lille, 1893.* (*Extrait.*)]

Les points matériels et la tige qui les réunit constituent un solide invariable.



Ce solide est soumis aux forces $F = km.OM$, $F' = km'.OM'$ et aux réactions normales de la circonférence qui s'exercent aux extrémités M et M′.

Nous remarquerons d'ailleurs que F et F′ se composent simplement; effectivement (15), leur résultante R est dirigée suivant $\overline{AO}$, et

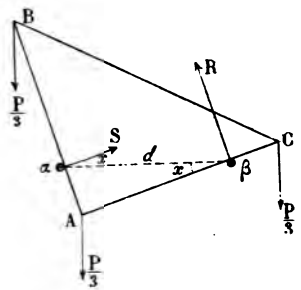
a pour intensité $k(m+m').OA$, le point A étant défini sur MM′ par $\frac{AM}{m'} = \frac{AM'}{m}$. Par conséquent, si nous prenons les moments par rapport au centre C du cercle, nous éliminons les forces de liaison d'intensité inconnue et nous voyons que R doit passer par C.

Il est alors aisé de déterminer les positions d'équilibre de MM′. En effet le lieu du point A défini plus haut est une circonférence concentrique à la première qui coupera le diamètre du point O en deux points A, A′ qui seront les positions du centre des deux masses m, m'.

On voit sans difficulté que pour la position A la plus éloignée de O l'équilibre est instable, tandis qu'il est stable pour la position A′.

134. *Une lame homogène* ABC *pesante, dont la forme est celle d'un triangle rectangle isocèle, est placée dans un plan vertical, et repose, par les côtés de l'angle droit, sur deux chevilles appartenant à une même horizontale. Déterminer la position d'équilibre et calculer les pressions sur les chevilles.*

Les chevilles étant α et β, posons $\alpha\beta = d$, $AB = AC = b$, et appelons R et S les réactions normales des chevilles. La position du triangle sera connue avec l'angle $\alpha\beta A = x$.



Pour exprimer l'équilibre des réactions R, S et du poids P du triangle nous projeterons sur AC et BC, il viendra

$$(1) \quad R - P\cos x = 0,$$
$$(2) \quad S - P\sin x = 0.$$

Appliquons maintenant le théorème des moments par rapport au sommet A, nous obtiendrons en remplaçant préalablement le poids P par trois poids $\frac{P}{3}$ appliqués aux sommets du triangle,

$$-A\alpha.S + A\beta.R + AB\sin x \cdot \frac{P}{3} - AB\cos x \cdot \frac{P}{3} = 0,$$

mais nous avons

$$A\alpha = d \sin x, \qquad A\beta = d \cos x, \qquad AB = AC = b,$$

de sorte qu'après substitution, il viendra

$$(3) \quad -Sd \sin x + Rd \cos x + \frac{P}{3} b(\sin x - \cos x) = 0.$$

Les équations (1), (2) et (3) vont nous donner x, R et S. Éliminons R et S nous aurons

$$3d(\cos^2 x - \sin^2 x) + b(\sin x - \cos x) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux

$$\sin x = \cos x,$$

d'où $x = 0$, et ce résultat était facile à prévoir, puis

$$3d(\cos x + \sin x) = b.$$

Élevons au carré, nous aurons

$$9d^2(1 + \sin 2x) = b^2,$$

d'où nous tirons

$$(4) \qquad \sin 2x = \frac{b^2 - 9d^2}{9d^2}.$$

Or x étant aigu, il faudra pour la possibilité $0 < \sin 2x < 1$, c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$3d < b < 3\sqrt{2}\, d.$$

Ces conditions étant remplies, l'équation (1) donne pour $2x$ deux valeurs inférieures à 180°, ω et $180° - \omega$ et pour x les deux solutions

$$x' = \frac{\omega}{2}, \qquad x'' = 90° - \frac{\omega}{2}.$$

D'ailleurs ces solutions ne sont pas absolument distinctes, car elles donnent pour le triangle deux positions symétriques par rapport à la verticale du milieu de $\alpha\beta$.

Quant aux forces de liaison R et S elles s'obtiendront à l'aide des relations (1) et (2), nous avons en effet

$$R = P \cos x,$$

$$S = P \sin x.$$

Pour $x = \frac{\omega}{2}$, nous avons, puisque $\omega < 90^0$, c'est-à-dire $\omega < 45^0$,

$$\cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{1 + \sin\omega} = \frac{b}{3d},$$

$$\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - \sin\omega} = \frac{\sqrt{18d^2 - b^2}}{3d};$$

par conséquent, il viendra

$$R_1 = \frac{1}{6d}\left[b + \sqrt{18d^2 - b^2}\right]P,$$

$$S_1 = \frac{1}{6d}\left[b - \sqrt{18d^2 - b^2}\right]P.$$

Pour $x = 90^0 - \frac{\omega}{2}$, on aura évidemment

$$R_2 = S_1,$$
$$S_2 = R_1.$$

135. *Un disque elliptique homogène et très mince est placé dans un plan vertical sur deux appuis, situés aux extrémités de deux diamètres conjugués et placés à la même hauteur.*

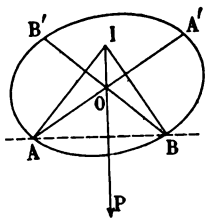
Démontrer que le disque est en équilibre et étudier la stabilité.

P. Jullien.

Soient les deux diamètres conjugués AA′ et BB′ et supposons $\widehat{AOB}$ obtus.

1° Les appuis sont A et B.

Les réactions des appuis étant normales à l'ellipse seront dirigées suivant les hauteurs AI, BI du triangle AOB; elles seront donc concourantes avec la verticale du centre de gravité O du disque.



Par suite on pourra décomposer le poids du disque en deux forces dirigées suivant IA, IB et qui seront détruites par les appuis.

Le disque est donc en équilibre.

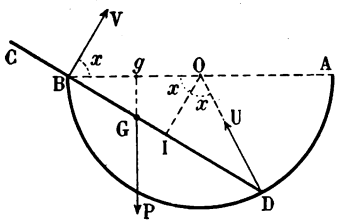
Cet équilibre est stable ; en effet, déplaçons infiniment peu le disque, c'est-à-dire faisons-le tourner d'un petit angle autour du centre instantané I ; dans sa nouvelle position, le poids tendra à le ramener dans sa position primitive, car O est au-dessous de I; quant aux réactions elles ne produiront aucun effet, puisqu'elles concourent au point I qui est *fixe* pendant ce déplacement.

2° Les appuis sont B et A'.

Comme $\widehat{BOA'} < 90°$, le point I de concours des hauteurs du triangle B'OA sera au-dessous de O et l'équilibre sera instable.

136. *Position d'équilibre d'une tige homogène pesante reposant par une extrémité à l'intérieur d'une coupe hémisphérique et s'appuyant sur le bord horizontal de cette coupe.*

Les forces agissant sur la barre sont : son poids P appliqué au milieu G, les réactions U, V de la coupe, d'ailleurs normales l'une à la coupe, l'autre à la tige. Ces trois forces devant se faire équilibre sont complanes et leur plan contient le centre O de la coupe et est vertical comme contenant les forces U et P.



Représentons donc la section de la coupe par ce plan, et soient a et $2l$ le rayon de la coupe et la longueur de la tige.

Pour exprimer que la tige est en équilibre nous projeterons sur l'horizontale et la verticale ascendante et nous prendrons les moments par rapport au point O. Il viendra ainsi

$$(1) \qquad V \cos x + U \cos 2x = 0,$$

$$(2) \qquad V \sin x + U \sin 2x - P = 0,$$

$$(3) \qquad Og . P - a \sin x . V = 0.$$

Nous avons d'ailleurs

$$Og = a - BG \sin x = a - (2a \sin x - l) \sin x,$$

et il est important de remarquer que cette expression de Og est la même lorsque le point G est extérieur à la coupe; par suite (3) s'écrira

$$(4) \qquad [a - (2a \sin x - l) \sin x] P - a \sin x V = 0.$$

Mais les équations (1) et (2) nous donnent

$$V \sin x = - P \cos 2x,$$

et en substituant dans (4) nous obtiendrons

$$a - (2a \sin x - l) \sin x + a \cos 2x = 0,$$

ou bien encore

$$(5) \qquad f(\sin x) = 4a \sin^2 x - l \sin x - 2a = 0.$$

Telle est l'équation qui détermine la position d'équilibre.

Or, nous avons $x < 90°$, c'est-à-dire $0 < \sin x < 1$.

Le problème n'est donc susceptible que d'une solution puisque (5) a une racine négative, et pour que cette solution existe il faut

$$f(0)f(1) < 0,$$

c'est-à-dire

$$l \leqslant 2a.$$

Enfin pour que la barre appuie sur le bord de la coupe il faut encore que l'on ait $DB < 2l$ ou $2a \sin x < 2l$, c'est-à-dire

$$f(0)f\left(\frac{l}{a}\right) < 0,$$

d'où nous tirons

$$l > a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

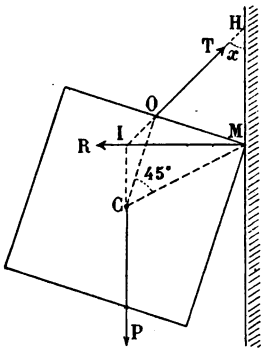
Dans le cas limite $l = 2a$, la tige est en équilibre dans la position horizontale, on a d'ailleurs $V = P$, $U = 0$; tout se passe comme si elle reposait uniquement par son milieu sur le point B.

137. *Un cube homogène de poids* P *et d'arête* $2a$ *s'appuie sans frottement par une arête horizontale* AB *le long d'un mur vertical; ce cube est soutenu par un fil de longueur* l *attaché au mur et au centre* O *de l'une des faces qui ont pour arête* AB. *Déter-*

miner la position d'équilibre du cube; calculer la tension du fil et la réaction du mur sur le milieu M *de* AB.

(*Cert. d'apt. à l'Ens. second. spécial, 1893.*)

Soient HO le fil, C le centre de gravité du cube. Dans la position d'équilibre le plan HOC est vertical et contient le milieu M de l'arête AB.



La tension T du fil, le poids P du cube et la réaction R normale du mur tenant le cube en équilibre, nous aurons en posant $\widehat{OHM} = x$ et projetant sur l'horizontale et la verticale

$$(1) \qquad T \sin x - R = 0,$$

$$(2) \qquad T \cos x - P = 0.$$

D'autre part P, R et T seront concourantes. Soit I leur point de concours, et remarquons que les points O et I appartiennent à la circonférence de diamètre MC, nous aurons

$$\widehat{MIO} = \widehat{MCO} \text{ (comme ayant même mesure)},$$

mais $\widehat{MIO} = 90° - x, \qquad \widehat{MCO} = 45°,$

donc $x = 45°.$

Ce résultat, indépendant des longueurs relatives du fil et de l'arête du cube est remarquable.

La position du cube s'obtiendra en construisant le triangle HOM dans lequel on connaît deux côtés $OH = l$, $MO = a$ et l'angle $\widehat{MHO} = 45°$ opposé à l'un d'eux.

Pour que ce triangle soit possible, il faut évidemment que l'on ait

$$a > \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

Si cette condition est réalisée, il y aura un ou deux triangles répondant aux données, mais il faudra rejeter celui pour lequel l'angle $\widehat{OMH}$ sera obtus, le cube ne pouvant pas pénétrer dans le

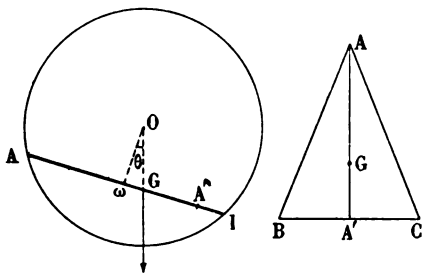
mur. Les équations (1) et (2) nous donnent pour les forces de liaison

$$T = P\sqrt{2},$$
$$R = P.$$

138. *Dans l'intérieur d'une sphère creuse on place une lame pesante et homogène dont la forme est celle d'un triangle isocèle ; les trois sommets appuient sur la sphère.*

Position d'équilibre de cette lame.

Par raison de symétrie les sommets B et C des angles égaux du triangle isocèle seront situés dans la position d'équilibre de la lame à une égale hauteur, et le plan OAA′ (AA′ étant la hauteur issue de A) sera vertical.



Représentons la section par ce plan. Pour qu'il y ait équilibre il faut que OG soit verticale (G étant le centre de gravité du triangle) ; effectivement on pourra alors décomposer le poids P de la lame suivant les trois directions OA, OB, OC, et les composantes ainsi obtenues représenteront les pressions exercées par les sommets du triangle sur la sphère.

Posons $AA' = h$, $BC = a$, $OA = r$ et représentons par θ l'angle de OG avec la perpendiculaire $O\omega$ à AI.

Nous avons $AG = \frac{2h}{3}$, $\qquad A\omega = \frac{AI}{2}$.

Calculons AI, pour cela remarquons que l'on a

$$A'I.A'A = A'B.A'C = \frac{a^2}{4},$$

d'où
$$A'I = \frac{a^2}{4h},$$

et
$$AI = \frac{a^2}{4h} + h = \frac{a^2 + 4h^2}{4h}.$$

Par conséquent, il viendra

$$A\omega = \frac{a^2 + 4h^2}{8h},$$

$$\omega G = \frac{2h}{3} - \frac{a^2 + 4h^2}{8h} = \frac{4h^2 - 3a^2}{24h}.$$

Le triangle rectangle $OG\omega$ nous donnera alors

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega G}{\omega O},$$

ou bien

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{4h^2 - 3a^2}{3\sqrt{64h^2r^2 - (4h^2 + a^2)^2}}.$$

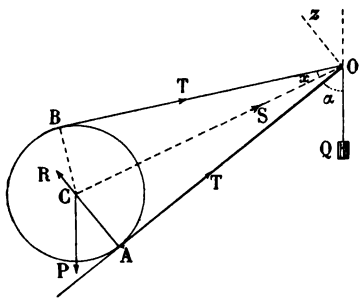
Puisque l'on connaît AI, cet angle θ suffit à définir la position du triangle.

La discussion de (1) n'offre d'ailleurs aucune difficulté.

139. *Un cercle pesant vertical et homogène s'appuie sur la ligne de pente* OA *d'un plan incliné poli; un fil dont une extrémité est fixée au point* O, *s'enroule sur la gorge du cercle puis sur une poulie très petite placée aussi en* O *et supporte à son extrémité libre un poids* Q.

Trouver la position d'équilibre du cercle et étudier la stabilité.

Le cercle est soumis à l'action de son poids P appliqué au centre C, de la réaction R du plan incliné et des tensions T du fil appliquées en A et B. Ces tensions étant égales, ont pour valeur commune Q. D'ailleurs ces deux forces se composent en une seule



$$CS = 2Q\cos x.$$

Projetons les trois forces P, R et CS sur OA et la perpendiculaire OZ, il viendra

$$(1) \qquad 2Q\cos^2 x - P\cos\alpha = 0,$$

$$(2) \qquad R - P\sin\alpha - 2Q\cos x\sin x = 0.$$

De l'équation (1) nous tirons

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{P \cos \alpha}{2Q}}. \tag{3}$$

Or le fil ne devant pas abandonner la gorge de la poulie O, $2x$ a pour limites 0 et $180° - \alpha$ et par suite x doit être compris entre 0 et $90° - \frac{\alpha}{2}$.

Il faudra donc choisir le signe $+$ dans l'égalité (3), en outre pour que l'équilibre soit possible, les données devront vérifier les inégalités

$$1 > \frac{P \cos \alpha}{2Q} > \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

qui s'écrivent encore

$$\frac{P}{P+2Q} > \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} > \frac{P-2Q}{P+2Q}.$$

L'équation (2) nous donne pour la réaction du plan

$$R = P \sin \alpha + Q \sin 2x,$$

et le second membre est toujours positif, comme ceci doit avoir lieu.

Stabilité. — Considérons les projections des forces CS et P sur la ligne de pente, l'équilibre se produit quand elles sont égales et la stabilité dépend de leurs valeurs relatives dans le voisinage de la position d'équilibre. Ces composantes ont pour expressions $2Q \cos^2 x$ et $P \cos \alpha$.

Or donnons au cercle un déplacement vers O, x augmente, $2Q \cos^2 x$ diminue, et la force $P \cos \alpha - 2Q \cos^2 x$ ramène le cercle à sa position d'équilibre; on voit de même que si l'on donne au cercle un déplacement en sens contraire, la force $2Q \cos^2 x - P \cos \alpha$ lui fera reprendre sa première position.

En résumé l'équilibre du cercle est stable.

EXERCICES

93. — Une poutre homogène AB, de 4^m de long, est mobile autour d'un point O tel que $AO = 1^m$, son extrémité inférieure A s'appuie sur un mur vertical situé à $0^m,50$ du point O.

Calculer, quand il y a équilibre, la pression sur le mur et sur le point O.

94. — Une barre homogène AB s'appuie par l'une de ses extrémités sur un plan horizontal AC et par l'autre extrémité sur la surface convexe d'un hémisphère dont le centre est C. Déterminer la force horizontale qu'il faut appliquer en A pour que la barre demeure dans une position donnée. Calculer aussi les pressions sur la sphère et sur le plan.

95. — Une tige homogène dont les bras de longueur $2a$ et $2b$ sont à angle droit repose sur un anneau circulaire situé dans un plan vertical. Trouver l'inclinaison du bras de longueur $2a$.

96. — Une tige homogène ABC recourbée à angle droit en B de manière que $AB = a$, $BC = b$, peut tourner librement autour du sommet fixe B dans le plan vertical ABC.

1° Calculer l'angle que fait BC avec l'horizontale Bx quand il y a équilibre.

2° En supposant $a < b$, quel poids faut-il suspendre en A pour que dans la nouvelle position d'équilibre, les points A et C soient à la même hauteur ? Évaluer alors la pression au point B.

(*Bacc.*, *Lille*, *1886*.)

97. — Une barre rigide pesante est sollicitée à ses extrémités par des poids donnés et un cordon fixé aux extrémités peut glisser sur un point fixe. Position d'équilibre de la tige?

98. — Une barre rigide AB de poids 2P, libre de se mouvoir autour du point A, est reliée à un point fixe C par un cordon qui est sollicité à l'autre extrémité par un poids P ; on suppose AC vertical et $AB = AC$. Déterminer la position d'équilibre de la tige.

99. — Une lame homogène pesante a la forme d'un demi-cercle

ABC ; elle est soutenue par un fil attaché aux extrémités du diamètre AB et qui passe dans un anneau très petit O. Déterminer la position d'équilibre de la lame et reconnaître la stabilité.

Long. du fil $= l$, R = rayon de ABC, P = poids de la lame.

(*Conc. d'Agrégation, 1879.*)

100. — Une coupe hémisphérique de poids P repose sur un plan horizontal et les rayons des deux hémisphères qui forment ses surfaces sont R et r. On suspend à l'aide d'un fil attaché au bord extérieur de la coupe un poids p; calculer l'angle que forme l'axe de la coupe avec la verticale quand l'équilibre est établi.

101. — Un triangle ABC est suspendu librement par le sommet A. Aux deux autres sommets sont suspendus des poids P et Q. On demande de calculer l'inclinaison α de BC sur l'horizontale.

Application. — Le triangle est équilatéral, $P = 30^{kg}$, $Q = 5^{kg},255$.

(*Bacc., Besançon, 1874.*)

102. — Une barre pesante AB est portée horizontalement par deux fils AC, BD dont les longueurs sont données. L'extrémité C du premier fil étant fixe, sur quelle courbe faut-il prendre le point D extrémité du second fil pour qu'il y ait équilibre ?

103. — A l'extrémité B d'une tige horizontale AB, scellée dans un mur par son extrémité A, est suspendu un poids P. Un bras DC fixé en D contre le mur soutient la tige en C. On désigne par α l'angle ADC et l'on demande : 1° La force T qui sollicite AB dans la direction AB ; 2° La pression verticale qui en A s'exerce de bas en haut ; 3° La pression t que subit le bras CD dans sa direction.

Application. — $P = 100^{kg}$, $AB = 1^{m},20$, $AC = 0^{m},20$, $\widehat{ADC} = 30°$.

(*Bacc., Besançon, 1872.*)

104. — Un cylindre en bois de $0^{m},1$ de rayon et $0^{m},5$ de hauteur repose par sa base sur un plan horizontal qui coupe celui de la figure suivant une droite OH et qui contient un axe fixe O. La densité du bois étant 0,8 et le corps ne pouvant glisser, on demande : 1° quelle force X il faut appliquer au centre de gravité G du cylindre et horizontalement pour le renverser ; 2° quel est l'angle dont il faut faire tourner le plan d'appui autour de l'arête O pour que le cylindre se renverse ; 3° la distance OA de l'axe à la génératrice la plus rapprochée étant de 1^{m} et OH étant égal à $1^{m},8$, quelle force

verticale Y il faut appliquer en H pour maintenir le plan dans la position pour laquelle le cylindre est sur le point de tomber.

(*Diplôme, Alger, 1882.*)

105. — Un triangle pesant ABC s'appuie par deux sommets B et C sur un cercle vertical dont le rayon égale celui du cercle circonscrit au triangle. Trouver la position d'équilibre du triangle et calculer les réactions de la circonférence.

106. — Une tige rectiligne homogène a deux petits anneaux attachés à ses extrémités ; l'un d'eux glisse sur un fil vertical fixe et l'autre sur un fil ayant la forme d'une parabole dont l'axe coïncide avec le fil vertical. Position d'équilibre de la tige. — Stabilité.

107. — On donne un secteur circulaire AOB non pesant et mobile autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par O ; il est sollicité par deux forces verticales F, F′ appliquées en A et B. Trouver les conditions d'équilibre.

(*Saint-Cyr, 1896.*)

108. — Une barre rectiligne homogène AB de poids P peut tourner autour de son extrémité B. A l'extrémité A est attaché un fil qui passant sur une poulie O supporte à son extrémité libre un poids $\frac{P}{2}$.

Sachant que le centre de la poulie est situé sur la verticale ascendante du point B à une distance BO = BA, trouver la position d'équilibre de la tige.

(*Saint-Cyr, 1896.*)

109. — On donne une pyramide régulière dont la base est un carré ABCD ; la diagonale de ce carré a $0^m,16$ de long et les arêtes latérales $0^m,17$. Cette pyramide, solide et homogène suspendue par le milieu M de l'arête SA est en équilibre stable ; calculer l'angle que fait l'arête SA avec la verticale.

On suspend ensuite au sommet S un poids ; quel doit être le rapport de ce poids à celui de la pyramide pour que le système étant en équilibre, l'arête SA soit horizontale ?

Enfin à quelle distance de la base faut-il couper la pyramide par un plan parallèle à la base pour que cette portion de la pyramide étant enlevée, le point de suspension M restant le même, et le poids qu'on avait attaché en S étant supprimé, l'arête SA soit horizontale ?

(*Bacc., ens. spécial, Lyon.*)

110. — Une ellipse pesante et homogène dont le plan est vertical est posée sur une droite horizontale située dans ce plan.

Aux foyers sont appliqués des poids inégaux. Trouver l'angle que fera le grand axe avec l'horizontale, quand l'équilibre sera établi.

(*Agrég. classique, 1867.*)

111. — Une plaque infiniment mince, rectangulaire homogène et pesante est située dans un plan vertical. Elle est soutenue par deux chevilles situées dans un même plan horizontal. On demande de trouver la relation qui existe entre les côtés a, b de la plaque, la distance c des chevilles et l'angle θ que fait le côté a avec la verticale quand l'équilibre est établi. Cas particulier : $a = b$.

112. — Soit un triangle équilatéral ABC de côté a, situé dans un plan vertical. Au milieu M de AB on attache un fil de longueur $OM = l$ dont l'autre extrémité est fixée en un point O d'un mur vertical VV'.

La tension du fil donne lieu à une force T appliquée en M, le sommet A s'appuie sans frottement sur VV'. Trouver les positions d'équilibre du triangle.

(*École navale, 1880.*)

113. — Une tige AB homogène pesante porte à ses extrémités deux anneaux très petits. Ces anneaux peuvent glisser sans frottement le long de deux droites xx', yy' situées dans un plan P. Trouver les positions d'équilibre de la tige. Cas particulier : le plan P est vertical.

114. — Une plaque triangulaire homogène pesante et assimilable à un plan est suspendue par trois fils attachés aux trois sommets du triangle. La plaque étant horizontale et les trois fils reliés à un même point, trouver une relation entre les longueurs des fils α, β, γ et les côtés du triangle respectivement opposés a, b, c.

115. — Un triangle pesant homogène ABC, dont on suppose connus les côtés a, b, c, les angles A, B, C et la densité D, est suspendu par son sommet A à un point M autour duquel il peut tourner librement. Quel est le poids x qu'il faut appliquer au sommet B pour que la base BC soit horizontale ?

(*École navale, 1881.*)

116. — Un bloc de taille homogène et régulier, de poids spécifique d, vu de profil suivant le rectangle ABCD, supporte une cons-

truction qui exerce une poussée P évaluée en tonnes, perpendiculaire à l'arête projetée en C et inclinée de $\alpha = 30°$ sur la verticale. Connaissant la hauteur $BC = h$ mètres, la largeur perpendiculaire au plan de la figure qui est égale à 1 mètre, calculer l'épaisseur minimum $AB = x$ strictement suffisante pour que le bloc ne soit pas renversé en tournant autour de l'arête projetée en A ? Que devient le rapport $\frac{x}{h}$, quand P devient très grand ?

(*Brev. de l'ens. spécial, Lille, 1881.*)

117. — Trouver la position d'équilibre d'une barre rigide appuyée par l'une de ses extrémités contre un mur vertical et dont l'autre repose sur la surface interne d'un hémisphère donné.

118. — On considère une table horizontale supportée par trois pieds verticaux ; le centre de gravité G et le poids P de cette table sont donnés ; on sait de plus que les pieds peuvent supporter des pressions ayant respectivement pour valeur maximum R, R′, R″.

1° Calculer le poids maximum que peut avoir un corps placé sur cette table dans une position déterminée.

2° Trouver la région où l'on peut placer un corps de poids donné sur cette table sans dépasser la limite de résistance des pieds.

119. — On donne un tièdre trirectangle $Oxyz$ dont la face xOy est horizontale et un triangle isocèle homogène pesant ABC ; ce triangle repose par son sommet C sur la face horizontale en un point de la bissectrice de l'angle xOy et s'appuie par ses deux autres sommets sur les deux plans verticaux ; de plus un fil OC relie le point O au sommet C et maintient le triangle en équilibre.

On demande : 1° la tension T du fil ; 2° la pression exercée par le triangle sur chacune des faces xOz, yOz.

120. — Une lame BAC, rectangle en A, repose en équilibre par les côtés de l'angle droit, sur deux disques fixes de même épaisseur que la lame, placés avec elle dans le même plan vertical, et ayant leurs centres O et O′ sur une même horizontale. Si l'on suppose que dans cette position d'équilibre, la verticale du centre de gravité de la surface ABC passe par le sommet A de l'angle droit, et de plus, que ce sommet est sur la ligne des centres, on demande d'exprimer, au moyen des côtés b, c du triangle : 1° Le rapport des rayons R et R′ des disques ; 2° Le rapport des seg-

ments AO, AO′ de la ligne des centres ; 3° Le rapport des charges supportées par les deux disques.

Si l'on a : $b = 0^m,60$, $c = 0^m,80$, $R = 0^m,27$, épaisseur $= 0^m,05$, densité $= 7$, on calculera le poids de la lame, la distance MN des points de contact, et on construira exactement la figure relative à ces données à l'échelle de 1/10.

(*Conc. acad. Ens. spécial, Poitiers, 1879.*)

CHAPITRE VII

ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES

---

140. Dans un système de solides ou de points matériels, il y a lieu de considérer deux espèces de forces, les *forces connues* et *les forces de liaison.*

Pour exprimer qu'un système est en équilibre il suffira de considérer en particulier chacun de ses éléments et d'écrire qu'il est en équilibre sous l'action des forces connues et des forces de liaison.

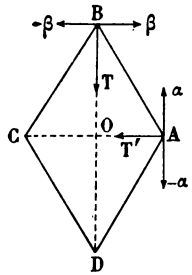
En résumé, la question de l'équilibre d'un système se ramène à l'étude de l'équilibre de points matériels ou de solides, d'ailleurs libres ou gênés.

La solution d'un tel problème consiste comme nous l'avons déjà dit non-seulement dans la recherche de la figure d'équilibre mais encore dans le calcul des forces de liaison.

Ainsi, si l'on se propose d'étudier la position d'équilibre d'un point matériel maintenu par un fil sur un plan incliné, la position du point étant préalablement déterminée, on calculera la tension du fil et la pression sur le plan ; ces deux forces devront être convenablement dirigées pour que les liaisons soient respectées. On dit qu'un système est à *liaisons complètes* quand les positions respectives de chacun de ses éléments ne dépendent que d'un même paramètre.

141. *Un losange non pesant est articulé à ses sommets, trouver sa forme d'équilibre sachant que les sommets opposés sont réunis par deux fils dont les tensions connues sont* T, T'.

Considérons en particulier le côté AB, il est soumis à l'action des tensions T, T′ et des pressions α, β aux charnières; d'ailleurs comme à ces pressions correspondent les réactions $-\alpha$, $-\beta$ agissant sur les extrémités A, B des côtés AD et BC, α et β sont en vertu de la symétrie perpendiculaires aux diagonales du losange.



Ceci posé, le théorème des projections et celui des moments nous donneront pour l'équilibre

$$\alpha = T, \qquad \beta = T',$$

et

$$\frac{OB}{T} = \frac{OA}{T'}.$$

Cette proportion fait connaître $\widehat{OBA}$ et par suite la forme d'équilibre du losange.

142. Horloge magique. — Supposons k masses $m_1, m_2, \ldots, m_k$ dont les $k-1$ premières sont fixes, la dernière m_k décrivant une courbe d'ailleurs quelconque C; le centre de ces masses décrit une courbe homothétique à C.

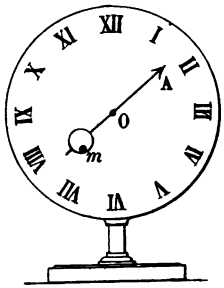
En effet soit I le centre des masses $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$; tirons Im_k. Le centre J des k masses appartiendra à IJ et sera défini par

$$\frac{IJ}{Im_k} = \frac{m_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}.$$

Cette relation nous montre bien que la courbe lieu du point J est homothétique à C; le rapport d'homothétie étant d'ailleurs $\dfrac{m_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}$.

Ceci connu, considérons une aiguille mobile autour du point O et portant à l'une de ses extrémités un anneau creux, dans l'intérieur duquel un mouvement d'horlogerie fait déplacer d'un mouvement uniforme une masse m. Le centre de gra-

vité du système décrira un cercle, et avec un rapport convenable entre le poids de l'aiguille et de m, ce cercle aura son centre au pivot O.

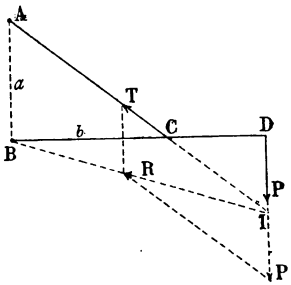


Pour que l'équilibre existe à chaque instant, il faudra que l'aiguille tourne d'un mouvement uniforme. En supposant que m effectue sa révolution en 12 heures, l'aiguille accomplira la sienne dans le même temps et pourra par conséquent marquer les heures.

143. *Une tige horizontale* BCD *porte un poids* P *à son extrémité* D; *elle est articulée au point* B *d'un plan vertical, et en* C *à une tige oblique* CA, *dont le bout* A *est lui-même articulé au point* A *du plan considéré; calculer les charges des articulations et de la barre* AC *dans cette sorte de potence?*

DE SAINT-GERMAIN.

Les barres étant supposées non pesantes ou plutôt de poids négligeables devant le poids P, il faut que la force qui s'exerce à l'extrémité C de AC passe par le point A.



Soit T son intensité; pareillement les forces — T et P qui sollicitent la tige BD l'une en C l'autre en D, devront se composer en une force passant par le point fixe B.

Or prenons l'intersection I de AC et de la verticale du point D et transportons le point d'application de P en I, en décomposant cette force suivant IB et ID on aura IR qui représentera en grandeur et direction la charge de la charnière B et IT la tension de AC. Par conséquent les triangles IRT et IBA étant semblables, nous aurons

$$(1) \qquad \frac{R}{IB} = \frac{T}{IA} = \frac{P}{AB},$$

posons $AB = a$, $BC = b$, $CD = d$,
nous obtiendrons aisément

$$IA = \frac{b+c}{b}\sqrt{a^2+b^2}, \qquad IB = \frac{1}{b}\sqrt{b^2(b+c)^2+a^2c^2},$$

et en remplaçant dans (1) il viendra

$$T = \frac{b+c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}\,P,$$

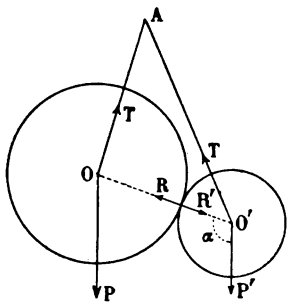
$$R = \frac{1}{ab}\sqrt{b^2(b+c)^2+a^2c^2}\,P.$$

144. *Deux sphères inégales sont suspendues aux deux extrémités d'un fil engagé dans un anneau. Les deux sphères se touchent, le centre de la plus légère est plus bas que celui de la plus lourde.*

Prouver que dans cet état d'équilibre, les distances des centres des sphères à l'anneau de suspension sont en raison inverse des poids. P. JULLIEN.

Les tensions du fil aux points O, O′ sont égales, car s'il n'en était pas ainsi le fil glisserait dans l'anneau ; représentons-les par T et soient R et R′ $(R = R')$ les pressions mutuelles des sphères.

D'autre part, les trois forces R, P, T étant en équilibre, les formules de Stévin nous donneront en particulier



$$\frac{P}{\sin \widehat{AOO'}} = \frac{T}{\sin \alpha};$$

nous aurons pareillement pour l'équilibre de R′, P′, T

$$\frac{P'}{\sin \widehat{AO'O}} = \frac{T}{\sin \alpha}.$$

Il viendra donc

$$\frac{P}{\sin \widehat{AOO'}} = \frac{P'}{\sin \widehat{AO'O}},$$

ou bien

$$\frac{P}{AO'} = \frac{P'}{AO}.$$

Remarque. — Cette relation jointe à $OA + O'A = l$ fait connaître la forme du triangle ; pour avoir sa position, il suffira de placer verticalement la droite AC, C étant le centre des poids P, P'.

145. *Déterminer la forme d'équilibre d'un polygone plan* ABC... *dont chaque côté est sollicité par une force qui lui est perpendiculaire, appliquée en son milieu et proportionnelle à sa longueur.*

FUSS, 1817 ; DE SAINT-GERMAIN.

Le côté AB du polygone étant en équilibre, la force $k.AB$ appliquée perpendiculairement à son milieu et les pressions P, Q sur les extrémités A et B sont concourantes. Soit A' leur point de concours, le triangle AA'B est isocèle, on a donc

$$P = Q \qquad \text{et} \qquad k.AB = 2P \sin \widehat{A'BA}.$$

Or, soit O le point de rencontre des perpendiculaires à AB en son milieu et à A'B au point B ; nous aurons

$$\frac{AB}{2} = BO \sin \widehat{A'BA},$$

d'où

$$BO = \frac{P}{k}.$$

Mais la pression sur l'extrémité B de BC est égale et directement opposée à $Q = P$ et si nous appelons O' l'intersection avec BO de la perpendiculaire à BC en son milieu, nous obtiendrons pareillement

$$BO' = \frac{P}{k};$$

donc O' et O coïncidant, nous aurons $OA = OB = OC$.

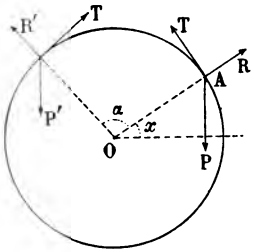
En continuant ainsi on voit que le point O est équidistant des sommets du polygone qui est par suite inscriptible à une circonférence.

146. *Aux extrémités d'un fil tendu et reposant entièrement sur la circonférence d'un disque circulaire vertical sont attachés deux points matériels de poids* P, P'. *Trouver la position d'équilibre*

du système ; calculer les réactions de la circonférence sur les deux points ainsi que les tensions du fil à ses extrémités.

(*Saint-Cyr, 1896.*)

Soit AA′ le fil, nous aurons, l étant sa longueur, $l = r\alpha$. A est sollicité par son poids P, la tension T du fil et la réaction R de la circonférence; pareillement A′ sera soumis à l'action des trois forces P′, T′, R′, on a d'ailleurs $T' = T$; en effet, si ces tensions étaient différentes, le fil glisserait sur la circonférence d'un côté ou de l'autre.



Équilibre de A :

(1) $T = P\cos x$,

(2) $R = P\sin x$.

Équilibre de A′ :

(3) $T = -P'\cos(\alpha + x)$,

(4) $R' = P'\sin(\alpha + x)$.

Ces quatre équations nous donneront x, R, R′, T.

Nous avons en effet en considérant (1) et (3)

$$P'\cos(\alpha + x) + P\cos x = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tg} x = \frac{P + P'\cos\alpha}{P'\sin\alpha}.$$

x étant connu, on aura immédiatement les forces de liaison.

Discussion. — Le fil étant tendu nous devons avoir $T > 0$ ou

(5) $\cos x > 0$, et $\cos(\alpha + x) < 0$;

pareillement les points appuyant sur le disque il faut $R > 0$, $R' > 0$, c'est-à-dire

(6) $\sin x > 0$ et $\sin(\alpha + x) > 0$.

Les inégalités (5) expriment que les extrémités du fil doivent être situées respectivement dans le premier et le second quadrant; elles s'écrivent encore, en vertu de l'expression trouvée pour $\operatorname{tg} x$,

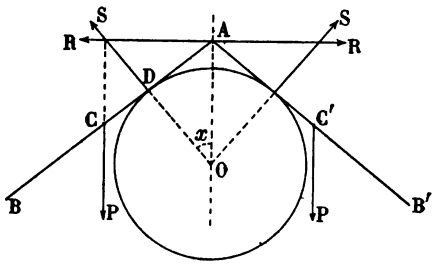
$$\cos\alpha > -\frac{P}{P'}, \qquad \cos\alpha > -\frac{P'}{P},$$

et l'on voit d'ailleurs que l'une de ces inégalités entraîne l'autre. Quant aux conditions (6) elles seront remplies avec la précédente.

147. *Équilibre d'un compas dont les deux branches identiques reposent sur la circonférence d'un cercle vertical ; on suppose qu'il n'y a pas de frottement.*

Soient C, C′ les centres de gravité des deux branches, $AC = AC' = a$, et P leur poids.

Les actions R de l'une quelconque des branches sur l'extrémité A de l'autre sont égales et directement opposées ; effectivement si nous assimilons la charnière à un anneau très petit, cet anneau devra être en équilibre sous l'influence de ces forces. Quant à la circonférence, elle oppose aux branches des réactions normales S. Ceci posé, le théorème des moments par rapport au point O nous montre que les forces P sont symétriques par rapport à la circonférence ; la charnière A est donc située sur la verticale de O et la figure est symétrique par rapport à cette verticale.



Posons $\widehat{AOD} = x$ et exprimons que la branche AB est en équilibre sous l'influence des forces R, S, P ; en appliquant le théorème des projections et des moments, il viendra

$$R - S \sin x = 0,$$

$$S \cos x - P = 0,$$

$$R \frac{b}{\cos x} - Pa \cos x = 0,$$

b étant le rayon de la circonférence,

ou bien

$$(1) \qquad S = \frac{P}{\cos x}, \qquad R = P \operatorname{tg} x,$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - \frac{a}{b} = 0.$$

Cette dernière équation donne x; je dis que le problème est toujours possible et d'une seule manière c'est-à-dire que l'équation (2) admet toujours une racine $\operatorname{tg} x$ positive et une seule.

En effet, posons $\operatorname{tg} x = z$, nous aurons

$$f(z) = z^3 + z - \frac{a}{b} = 0,$$

d'où

$$f'(z) = 3z^2 + 1;$$

$f'(z)$ étant constamment positive, la fonction continue $f(z)$ croît constamment avec z ; on aura donc pour ses variations le tableau suivant :

z	$-\infty$		0		z_1		$+\infty$
$f(z)$	$-\infty$	$\smile$	$-\frac{a}{b}$		0		$+\infty$

et nous voyons qu'il y a toujours une racine z_1 positive et une seule.

Connaissant x, les équations (1) fourniront R et S.

Remarque. — La position d'équilibre du compas pouvait s'obtenir immédiatement en exprimant que les trois forces R, S et P sont concourantes.

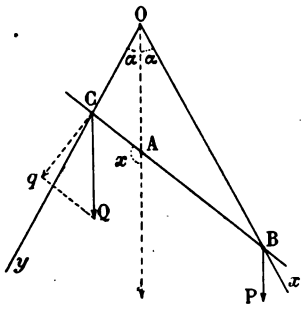
148. *Étant donné un angle xOy dont la bissectrice est verticale et dirigée vers le bas, trouver la position d'équilibre de deux mobiles de poids* P *et* Q *pouvant glisser sur un levier pivotant autour d'un point* A *de la bissectrice et étant assujettis à décrire sans frottement respectivement les côtés de l'angle. — Stabilité.*

Soit BAC la position d'équilibre du levier, et x l'angle du bras AC avec la bissectrice.

Décomposons le poids Q suivant les normales au côté Oy et

au levier, la première composante est détruite par la réaction normale de Oy, quant à la seconde q elle agit sur l'extrémité C du levier.

Le triangle CqQ nous donne d'ailleurs



$$\frac{q}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin(x-\alpha)},$$

d'où

$$q = \frac{\cos\alpha}{\sin(x-\alpha)}\,Q;$$

si nous décomposons pareillement le poids P, il viendra

$$p = \frac{\cos\alpha}{\sin(x+\alpha)}\,P.$$

Pour exprimer que le levier est en équilibre sous l'action des forces p et q nous appliquerons le théorème des moments par rapport au point fixe A.

Il viendra

(1) $$p.AB - q.AC = 0;$$

mais les triangles OAB, OAC nous donnent

$$AB = \frac{\sin\alpha}{\sin(x+\alpha)}\,OA,$$

$$AC = \frac{\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)}\,OA,$$

de sorte qu'en substituant dans (1) nous obtenons, après simplification

$$P\sin^2(x-\alpha) = Q\sin^2(x+\alpha),$$

d'où

(2) $$\sqrt{P}\sin(x-\alpha) = \pm\sqrt{Q}\sin(x+\alpha).$$

Or, en vertu de la figure on a

(3) $$\alpha < x < \pi - \alpha$$

et les deux membres de l'équation (2) sont positifs; il vient donc

$$\sqrt{P}\sin(x-\alpha) = \sqrt{Q}\sin(x+\alpha);$$

cette équation nous donne sans difficulté

$$(4) \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \frac{\sqrt{P} + \sqrt{Q}}{\sqrt{P} - \sqrt{Q}}.$$

On voit d'ailleurs aisément que les conditions (3) sont bien remplies. L'équilibre est donc toujours possible.

Stabilité. — Nous avons pour une position quelconque du levier, en prenant la valeur absolue des moments,

$$m^t p - m^t q = OA . \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{P}{\sin^2 (x + \alpha)} - \frac{Q}{\sin^2 (x - \alpha)} \right),$$

ou bien

$$m^t p - m^t q = OA . \sin \alpha \cos \alpha . F(x).$$

Soit x' la valeur de x qui répond à l'équilibre, et faisons varier x depuis α jusqu'à $\pi - \alpha$; $F(x)$ est continue dans cet intervalle et s'annule une seule fois pour $x = x'$; nous avons d'ailleurs

$$F(\alpha) = -\infty, \qquad F(\pi - \alpha) = +\infty;$$

donc

$$F(x' - \varepsilon) < 0, \qquad F(x' + \varepsilon) > 0.$$

Ceci posé, si nous écartons de l'angle $\pm \varepsilon$ le levier de sa position d'équilibre, nous aurons

$$m^t p \lessgtr m^t q,$$

de sorte que le levier basculera dans le même sens.

L'équilibre est donc instable.

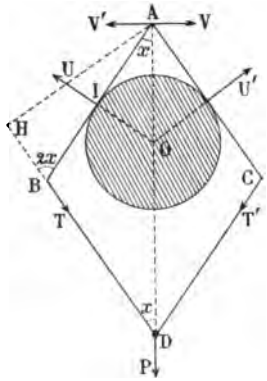
149. *Deux tringles* AB *et* AC *articulées en* A *s'appuient sur la surface d'un cylindre circulaire droit à axe horizontal; elles portent un fil* BDC *attaché en* B *et* C *et de longueur* AB + AC; *au milieu* D *de ce fil est suspendu un poids* P. *Déterminer la position d'équilibre du système en négligeant toute espèce de frottement et les poids des tiges et du fil; calculer la tension du fil et les réactions du cylindre sur* AB *et* AC.

Rayon du cylindre $= R$, $AB = AC = BD = CD = a$.

Cas particulier : $a = 5R$.

(*Certif. d'apt. à l'ens. second. spécial, 1893.*)

En vertu de la symétrie, lorsque l'angle BAC sera en équilibre la diagonale AD du losange sera verticale, et la figure d'équilibre de ce losange sera connue avec $\widehat{BAD} = x$.



Décomposons le poids P suivant les directions BD, CD des fils, nous obtiendrons les forces

$$T = T' = \frac{P}{2 \cos x}$$

qui agiront aux extrémités B et C des tiges et qui représenteront d'ailleurs les tensions des fils.

Les forces en action sur les deux tiges articulées seront donc T, T', les réactions U et U' de la section droite du cylindre et les actions mutuelles égales et directement opposées V, V' qui se manifestent à la charnière A.

V et V' agiront horizontalement à cause de la symétrie et pour la même raison on aura $U = U'$.

Ceci posé, pour exprimer l'équilibre de AB projetons les forces T, U, V qui sollicitent cette tige sur l'horizontale et la verticale ; nous aurons

$$-V + U \cos x - T \sin x = 0,$$

$$U \sin x - T \cos x = 0,$$

ou bien

$$(1) \qquad -V + U \cos x - \frac{P}{2} \operatorname{tg} x = 0,$$

$$(2) \qquad U \sin x - \frac{P}{2} = 0.$$

Prenons maintenant les moments par rapport au point A, il viendra

$$U.AI - T.AH = 0;$$

mais, $\qquad AI = R \cot x, \qquad AH = a \sin 2x;$

par conséquent nous obtiendrons

$$(3) \qquad U.R \cot x - Ta \sin 2x = 0.$$

Les équations (1), (2) et (3) vont nous donner x, U et V ; nous avons effectivement

$$(4) \qquad U = \frac{P}{2 \sin x},$$

$$(5) \qquad V = \frac{P}{2}(\cot g\, x - \operatorname{tg} x),$$

$$(6) \qquad R \cot^3 x + R \cot x - 2a = 0.$$

Posons $\cot x = z$, (6) s'écrira

$$(7) \qquad f(z) = Rz^3 + Rz - 2a = 0.$$

L'angle x étant compris entre 0 et 90°, nous devrons avoir $\cot x > 0$. Nous allons démontrer que le problème est toujours possible et qu'il n'admet qu'une solution.

Effectivement, nous avons

$$f'(z) = R(3z^2 + 1),$$

par suite $f(z)$ étant continue et sa dérivée $f'(z)$ étant toujours positive croîtra constamment avec z ; d'autre part comme

$$f(0) = -2a, \qquad f(+\infty) = +\infty,$$

$f(z)$ passera une fois et une seule fois par zéro quand x variera de 0 à $+\infty$..

Connaissant z, c'est-à-dire x, les équations (4) et (5) donneront U et V.

Cas particulier : $a = 5R$. — L'équation (7) s'écrit

$$z^3 + z - 10 = 0,$$

et son unique racine positive est $z = 2$.

Nous aurons donc

$$x = \text{arc cot.}\, 2,$$

puis

$$T = P\frac{\sqrt{5}}{4}, \qquad U = P\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad V = \frac{3P}{4}.$$

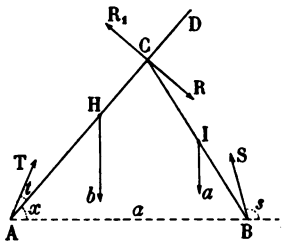
150. *Dans un plan vertical, autour de deux points* A, B *situés sur une même horizontale à la distance a pivotent deux barres* AD $= b$, BC $= a$, *homogènes et de poids b et a ; l'extré-*

mité C *de* BC *étant d'ailleurs assujettie à glisser* (*sans frottement*) *sur* AD.

1° *Trouver la position d'équilibre du système et calculer les forces de liaison*; 2° *Cas particulier :* $b = a\sqrt{2}$. *Stabilité.*

Les poids a, b des barres appliqués aux milieux I, H, sont les forces données.

Quant aux forces de liaison elles sont : la réaction S du point fixe B, faisant l'angle s avec AB ; la réaction T du point A inclinée de t sur AD ; enfin l'action et la réaction R, R_1 qui s'exercent normalement à AD au point C et ont même intensité.



La figure sera déterminée par la connaissance de l'angle $\widehat{DAB} = x$.

Écrivons séparément l'équilibre des deux barres, nous obtiendrons 6 équations qui nous fourniront les 6 inconnues du problème x, S, T, R, s, t.

Équilibre de BC : Projetons les forces R, a, S successivement sur l'horizontale et la verticale et appliquons le théorème des moments par rapport au point B, il viendra

$$(1) \qquad S\cos s + R\sin x = 0,$$

$$(2) \qquad S\sin s - R\cos x - a = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{a}{2}\cos 2x + R\cos x = 0.$$

Équilibre de AD : Projetons sur AD, la normale à AD et prenons les moments par rapport au point A, nous aurons

$$(4) \qquad T\cos t - b\sin x = 0,$$

$$(5) \qquad T\sin t - b\cos x + R = 0,$$

$$(6) \qquad 2aR\cos x - \frac{b^2}{2}\cos x = 0.$$

En écartant le cas singulier de $\cos x = 0$, l'équation (6)

nous donne

$$R = \frac{b^2}{4a}.$$

Remplaçons dans (3) il viendra

$$2a^2 \cos 2x + b^2 \cos x = 0,$$

ou bien

$$(7) \qquad f(\cos x) = 4a^2 \cos^2 x + b^2 \cos x - 2a^2 = 0.$$

Le triangle ABC étant isocèle, on doit avoir $0 < \cos x < 1$. Or

$$f(0).f(1) = -2a^2(2a^2 + b^2) < 0.$$

Donc la racine positive convient; on a d'autre part

$$f(0)f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2b^2\sqrt{2} < 0$$

et x est supérieur à 45^0.

Calcul de T et t : Les équations (4) et (5) nous donnent

$$T^2 = \frac{b^2}{16a^2}(16a^2 - 8ab \cos x + b^2),$$

et le second membre comme on le voit aisément est toujours positif ; puis

$$\operatorname{tg} t = \frac{4a \cos x - b}{4a \sin x}.$$

Calcul de S et s : Nous obtenons pareillement en nous reportant aux équations (1) et (2) :

$$S^2 = \frac{1}{16a^2}(b^4 + 8a^2b^2 \cos x + 16a^4),$$

$$\operatorname{tg} s = -\frac{b^2 \cos x + 4a^2}{b^2 \sin x}.$$

Stabilité. — Considérons la barre AD, et donnons à x un accroissement très petit, le moment de son poids b diminue tandis que celui de R_1 augmente, donc la barre AD basculera du côté où elle aura été déplacée, par suite l'équilibre du système est instable.

Cas particulier : $b = a\sqrt{2}$. — En introduisant cette hypo-

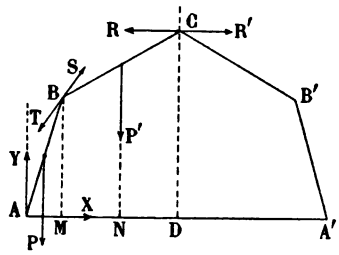
thèse particulière dans les formules générales on obtient

$$x = 60^\circ, \quad R = \frac{a}{2}, \quad T = \frac{a}{2}\sqrt{9 - 2\sqrt{2}}, \quad S = \frac{a}{2}\sqrt{7},$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6}}, \qquad \operatorname{tg} s = -\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

151. *Comble à la Mansard.* (*)

Soit une ferme ABCB′A′ symétrique par rapport au plan vertical CD, et symétriquement chargée. Les poids répartis de A en B sont réductibles à un poids P appliqué au milieu de AB ; les poids répartis de B en C à un poids P′ appliqué au milieu de BC. Des poids égaux à P et à P′ sont respectivement appliqués aux milieux de A′B′ et de B′C.



Le problème consiste à trouver la condition à laquelle doivent satisfaire les poids P et P′ pour qu'il y ait équilibre, connaissant $AD = l$, $DC = f$, $AM = m$, $MB = h$.

En vertu de la symétrie il suffit d'étudier l'équilibre de la moitié ABC de la ferme.

Les forces données sont P et P′ ; d'autre part, nous avons comme forces de liaison, la réaction (X, Y) de l'entrait AA′ à l'extrémité A, les actions mutuelles S et T égales et directement opposées à la charnière B, et pareillement R et R′ agissant simultanément en C.

R et R′, à cause de la symétrie agissent horizontalement.

Exprimons l'équilibre du contour ABC en projetant sur l'horizontale et la verticale et en prenant les moments par rapport à A, nous aurons

$$(1) \qquad X - R = 0,$$

$$(2) \qquad Y - P - P' = 0,$$

(*) E. Collignon. — *Traité de Mécanique*, Paris, Hachette, 1881.

$$Rf - P\frac{AM}{2} - P\cdot AN = 0\,;$$

mais $\frac{AM}{2} = \frac{m}{2}$, $AN = \frac{m+l}{2}$, par conséquent la dernière équation s'écrira encore

$$(3) \qquad Rf - P\frac{m}{2} - P'\frac{m+l}{2} = 0.$$

Chacun des côtés AB et BC étant séparément en équilibre, il viendra, en prenant les moments par rapport à B,

$$(4) \qquad P\frac{m}{2} + Xh - Ym = 0,$$

et

$$(5) \qquad R(f-h) - P'\frac{l-m}{2} = 0.$$

Ces deux équations rentrent d'ailleurs l'une dans l'autre en vertu de (1), (2) et (3).

Eliminons X, Y, R entre (1), (2), (3) et (4) nous aurons après réductions

$$\frac{P}{P'} = \frac{h(m+l)}{m(f-h)}.$$

Tel est le rapport cherché.

EXERCICES

121. — Six tiges égales, homogènes, pesantes, de poids p, sont articulées à leurs extrémités, de façon à former un hexagone régulier situé dans un plan vertical ayant son côté supérieur AB horizontal et fixe, et les autres côtés symétriquement placés par rapport à la verticale du milieu de AB. Quelle force F faut-il appliquer au milieu du côté horizontal opposé à AB pour maintenir le système en équilibre?

122. — On donne une barre homogène AB qui peut se mouvoir autour de son milieu D ; CE est une seconde barre mobile autour de son extrémité C située sur la même verticale que D et au-dessus ;

elle appuie sur AD par son extrémité E ; à l'extrémité B de AB est suspendu un poids P. Déterminer les positions d'équilibre des deux barres en supposant CD = AD.

123. — Un triangle articulé à ses sommets est en équilibre sous l'action de trois forces perpendiculaires à ses côtés en leurs milieux, proportionnelles à ses côtés et dirigées toutes vers l'extérieur. Calculer les forces de liaison.

124. — Une ferme est formée de deux arbalétriers égaux BA, BA′, également inclinés sur l'horizon et engagés dans un entrait AA′. Cet entrait repose par ses extrémités sur deux murs verticaux. Calculer les forces de liaison, sachant que les arbalétriers sont homogènes pesants et qu'ils supportent une charge également répartie sur leur longueur et de p kilogrammes par mètre.

125. — Une sphère est posée sur un plan horizontal et attachée par un fil à un point de ce plan ; en ce même point est articulée une tige pesante contenue dans le même plan vertical que le centre et appuyant sur la sphère, tension du fil.

126. — Déterminer les positions d'équilibre de deux poids P mobiles sans frottement sur une circonférence fixe située dans un plan vertical et sur une tige rectiligne pouvant tourner librement autour d'un point A pris sur le diamètre horizontal de la circonférence.

(*Agrég. ens. spécial, 1878.*)

127. — Un quadrilatère ABCD est articulé à ses sommets ; deux fils AC, BD dont on connaît les tensions T, S, joignent les sommets opposés. Trouver la condition géométrique que le quadrilatère doit remplir pour que l'équilibre ait lieu.

EULER, 1779.

128. — Un jeu de cartes est placé sur une table horizontale. On avance la carte du dessus dans le sens de sa longueur, aussi loin qu'elle peut se tenir horizontale. Sans déranger la position de cette première carte sur la seconde, on avance celle-ci aussi loin que l'ensemble des deux cartes du dessus peut se tenir horizontal, et ainsi de suite jusqu'à la carte du dessous qui demeure immobile. Déterminer les distances dont les cartes successives avancent l'une sur l'autre.

JULLIEN.

129. — Considérons une série de rectangles, tous de même longueur, mais de largeur quelconque ; supposons-les réunis suivant leur longueur par des charnières parfaitement collées, de façon à former un prisme creux. Plaçons ce prisme sur un plan horizontal parfaitement poli et versons de l'eau dans ce vase. Trouver la forme que prendra le prisme quand le liquide sera en équilibre stable.

(*Licence ès sc. math. Toulouse, 1890.*)

130. — Une planche rectangulaire homogène AB, de longueur l et de poids P, peut tourner autour d'un de ses petits côtés fixé horizontalement contre un mur vertical AC. En un point B du côté opposé est attaché un fil BCAQ, de poids négligeable, qui passant sur une très petite poulie C placée sur le mur à une distance h de la charnière, retombe verticalement en supportant un poids Q. Sur la planche repose un corps cubique d'arête a qui s'appuie contre le mur par une arête. Ce cube n'est pas homogène, mais le poids spécifique varie proportionnellement au carré de la distance à la face de contact ; il est k à l'unité de distance. Les points B, C et les centres de gravité de la planche et du cube sont d'ailleurs dans un même plan vertical normal au mur.

On demande de calculer le poids Q qui produit l'équilibre.

Calculer aussi les réactions.

Outre $AB = l$, P, $AC = h$, a et k, on connaît l'angle $BAC = \alpha$ que fait la planche avec le mur.

On fera abstraction des frottements, et on regardera le fil comme parfaitement flexible.

(*Agrég. ens. second. spécial, 1886.*)

131. — Trois sphères O, O′, O″ de poids P, P′, P″ homogènes sont placées dans une coupe hémisphérique et se touchent mutuellement ; leurs centres sont dans un même plan vertical avec le centre de la coupe. Trouver la position d'équilibre du système.

132. — Entre deux plans inclinés on place deux sphères homogènes de manière qu'elles s'appuient l'une contre l'autre et que chacune d'elles touche l'un des plans. Trouver les positions d'équilibre de ces sphères.

133. — Deux pendules électriques d'égale longueur l et dont les boules de même poids sont également électrisées peuvent osciller autour de deux points O, O′ situés sur une même horizontale à la distance $2a$. Trouver leur position d'équilibre.

134. — On considère six barres pesantes, homogènes, de même longueur et de même poids articulées à leurs extrémités de manière à former les six arêtes d'un tétraèdre régulier reposant par une de ses faces sur un plan horizontal.

Calculer la traction longitudinale exercée par chaque arête sur la base inférieure.

CHAPITRE VIII

MACHINES

---

152. Les machines sont des instruments destinés à transmettre l'action des forces ; leurs organes sont des corps gênés par des obstacles quelconques.

On peut encore dire que le but des machines est de mettre en équilibre à l'aide de liaisons des forces de grandeurs et de directions quelconques.

La machine est dite *simple* quand elle n'a qu'un organe et *composée* dans le cas contraire.

On réduit les machines simples à trois principales : le *levier*, le *tour* et le *plan incliné* ; le corps qui la compose est alors gêné par un point, deux points ou un axe, ou par un plan.

La *balance à colonne* et la *romaine* appartiennent au type levier et la *poulie fixe* au type tour.

Quant aux machines composées, nous nous bornerons à rappeler les suivantes que l'on étudie en statique élémentaire : la *bascule de Quintenz*, la *balance de Roberval*, la *poulie mobile*, les *moufles*, les *palans*, le *treuil à engrenages*, la *chèvre*, le *cabestan*, le *cric*, la *grue*, le *haquet* et le *binard*.

Les machines composées sont des systèmes à liaisons complètes.

153. *Des poids* P, 2P, 3P, ... $(n+1)$P *sont suspendus à des distances égales le long d'une barre dont le poids est négligeable et dont la longueur est* $2a$. *Trouver la position du point d'appui pour qu'il y ait équilibre ?*

Soit $AB = l$ la barre, C le point d'appui cherché et $AC = x$. Ce point C devra coïncider avec le centre des poids

qui sollicitent la barre ; nous aurons donc, en prenant les moments par rapport au point A,

$$x[P+2P+3P+\cdots+(n+1)P] = 2P\frac{l}{n} + 3P\frac{2l}{n} + \cdots + (n+1)P.l,$$

ou bien

$$(1)\quad \frac{(n+1)(n+2)}{2}x = [2+3.2+4.3+\cdots+(n+1)n]\frac{l}{n}.$$

La quantité entre crochets s'écrit encore

$$1+1+2(2+1)+3(3+1)+\cdots+n(n+1)$$
$$= (1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2),$$

ou bien

$$S_1+S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Il viendra donc en remplaçant dans (1)

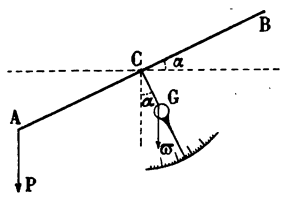
$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}x = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\frac{l}{n},$$

et nous aurons finalement

$$x = \frac{2l}{3}.$$

154. *Les bras d'un levier droit sont* AC *et* BC ; *au milieu fixe* C *est fixée une barre pesante* CD *perpendiculaire à* AB *et terminée par une aiguille mobile sur un arc de cercle de centre* C. *Faire voir que si l'on suspend divers poids successivement à l'extrémité* A, *les tangentes des angles que* CD *fait avec la verticale sont proportionnelles à ces poids.* (Pèse-lettres.)

Soit la position AB = $2l$ inclinée de α sur l'horizontale, CD fera alors l'angle α avec la verticale.



Suspendons le poids P à l'extrémité A et appelons ϖ le poids de la barre CD ; ϖ sera appliqué en un certain point G et nous poserons CG = d.

Prenons les moments par rapport au point fixe C, il viendra pour l'équilibre

$$Pl\cos\alpha = \varpi d\sin\alpha,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Pl}{\varpi d}.$$

$\operatorname{tg} \alpha$ est donc bien proportionnel à P.

Dans le *pèse-lettres*, le plateau est accroché à l'extrémité A.

155. *Un levier droit porte à ses extrémités* A, B, *deux poids inconnus* x, y. *Il reste en équilibre quand on le soutient par le point* C *situé aux distances* $CA = a$, $CB = b$ *de ces deux extrémités. On augmente les deux poids d'un même poids additionnel* p *et l'on trouve que l'équilibre se produit quand le nouveau point de suspension* C′ *est pris à la distance* c *de* C. *Trouver les forces* x *et* y. *Entre quelles limites le point* C *peut-il varier ?*

(*Diplôme, Rennes, 1882.*)

Dans le premier cas, nous avons pour l'équilibre du levier

$$(1) \qquad ax - by = 0.$$

Soit $a > b$, les deux forces p se composant pour donner $2p$ appliqué au milieu O de AB et la résultante $x + y$ des poids x et y passant en vertu de (1) par C, le point C′ devra être choisi entre O et C, et nous trouvons déjà comme condition de possibilité $c < CO$ ou $c < \frac{a-b}{2}$.

Ceci posé, en prenant les moments par rapport à C′, il viendra

$$(a - c)x + p(a - c) = (b + c)y + p(b + c),$$

ou bien

$$(2) \qquad c(x + y) = p(a - b - 2c).$$

Le système simultané des équations (1) et (2) nous donne

$$x = \frac{(a - b - 2c)b}{(a + b)c} p,$$

$$y = \frac{(a - b - 2c)a}{(a + b)c} p.$$

En exprimant que x et y sont positifs on retrouve la condition $c < \frac{a-b}{2}$.

156. *Soit une balance dont le fléau pèse* 50^{gr}; *la longueur de ce fléau est de* 40^{cm}; *son centre de gravité est à* 1^{cm} *au-dessous de l'axe de suspension; l'aiguille indicatrice a* 20^{cm} *de longueur. Cela posé, on demande :* 1° *quel est le déplacement de l'extrémité de l'aiguille pour un poids p mis dans l'un des plateaux;* 2° *quelle modification il faudrait apporter à l'appareil pour qu'il pût peser des poids descendant jusqu'à* 1 *milligramme. On admettra que le déplacement minimum appréciable à l'œil nu pour l'extrémité de l'aiguille est de* $\frac{1}{2}$ *millimètre.*

(*Journal de Vuibert, 1882-83.*)

1° L'inclinaison α du fléau sur l'horizontale est donnée par la formule connue

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{\varpi d}.$$

Faisons dans cette formule $l = 20^{cm}$, $\varpi = 50^{gr}$, $d = 1^{cm}$; il viendra

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2p}{5}.$$

L'aiguille ayant même déplacement angulaire α que le fléau, son extrémité décrira un arc a défini par

$$a = \frac{20.\pi\alpha}{180}$$

α étant exprimé en degrés.

2° L'angle α étant très petit nous pourrons remplacer $\operatorname{tg} \alpha$ par l'arc α; alors si $p = 0^{gr},001$, nous aurons

$$\alpha = \frac{0,001 \times l}{\varpi d}.$$

Le déplacement de l'extrémité de l'aiguille sera 20α exprimé en centimètres ou bien

$$\frac{0{,}001 \times 20 \times l}{\varpi d}.$$

Or pour qu'il soit appréciable nous devons avoir

$$\frac{0{,}001 \times 20 \times l}{\varpi d} \geqslant 0{,}05,$$

d'où

$$\frac{\varpi d}{l} \leqslant \frac{2}{5}.$$

On pourra par exemple vérifier cette inégalité en changeant l'axe de suspension, c'est-à-dire en faisant varier d et en conservant les autres données de l'appareil ; il viendra alors

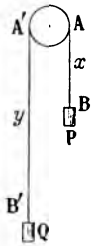
$$\frac{50 \times d}{20} \leqslant \frac{2}{5},$$

d'où

$$d \leqslant 0^{\text{cm}},16.$$

157. *Un fil flexible qui pèse p par mètre courant a une longueur l et porte à ses extrémités deux poids* P, Q. *On demande de placer ce fil en équilibre sur la gorge d'une petite poulie. Application numérique (Alger, brevet) :*

$$p = 0^{\text{gr}},4 \qquad l = 12^{\text{m}}, \qquad P = 9^{\text{gr}}, \qquad Q = 7^{\text{gr}}.$$



Supposons le problème résolu et soient $AB = x$, $A'B' = y$ les longueurs des brins du fil.

La poulie étant supposée très petite, nous aurons

(1) $$x + y = l.$$

D'autre part, l'équilibre étant réalisé la résultante des forces parallèles $P + px$ et $Q + py$ rencontrera l'axe de la poulie, nous aurons donc

$$P + px = Q + py,$$

d'où

(2) $$x - y = \frac{Q - P}{p}.$$

Par suite (1) et (2) nous donneront après résolution

$$x = \frac{pl + Q - P}{2p},$$

$$y = \frac{pl + P - Q}{2p}.$$

Supposons $P > Q$, pour que l'équilibre soit possible, il faut et il suffit que x et y soient positives.

On a évidemment $y > 0$, et il viendra pour unique condition

$$pl + Q - P > 0,$$

d'où nous tirons

$$P < Q + pl.$$

L'un des poids P devra donc vérifier la double inégalité

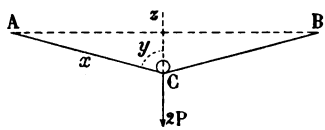
$$Q < P < Q + pl.$$

Application. — Si nous faisons dans ces formules $p = 0^{gr},4$, $l = 12^{m}$, $P = 9^{gr}$, $Q = 7^{gr}$, nous obtiendrons

$$x = 3^{m},50, \qquad y = 8^{m},50.$$

158. *Un fil extensible* $AB = 2l$ *est tendu horizontalement, ses extrémités étant fixées en* A *et* B. *On pose sur ce fil une poulie très petite; cette poulie dont la chape supporte un poids* 2P *repose verticalement sur le fil qui passe sur sa gorge. Sachant que l'allongement du fil est proportionnel à sa tension* T *et que cet allongement est* $2\frac{l}{P}$ *pour la tension* 1, *on demande la figure d'équilibre du fil.*

Dans la position d'équilibre, les tensions T des deux brins du fil sont égales et font équilibre au poids 2P dont la direction passe par le centre de la poulie, par conséquent les deux brins du fil auront même longueur x, le triangle ACB étant isocèle.



Soit Cz la verticale ascendante menée par le centre de la poulie, et posons $\widehat{ACz} = y$, il viendra en exprimant l'équilibre de la poulie

$$2P = 2T \cos y.$$

D'autre part l'allongement du fil étant $2(x - l)$, nous avons en vertu de l'hypothèse

$$2(x - l) = 2\frac{l}{P}T.$$

Enfin, le triangle ACB nous donne

$$l = x \sin y.$$

Les trois équations que nous venons d'écrire vont nous fournir l'angle $2y$ des deux brins du fil et sa tension T.

Nous avons en effet

$$(1) \qquad \sin y \cos y = \cos y - \sin y,$$

$$(2) \qquad T = \frac{P}{\cos y}.$$

Or, élevons au carré les deux membres de (1), il viendra

$$\sin^2 y \cos^2 y = 1 - 2 \sin y \cos y,$$

ou bien

$$\sin^2 2y + 4 \sin 2y - 4 = 0.$$

L'angle $2y$ étant inférieur à 180°, la racine positive convient seule et nous avons

$$\sin 2y = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Finalement, en exprimant $\cos y$ en fonction de $\sin 2y$ et substituant dans (2) nous obtiendrons pour la tension du fil

$$T = \frac{2P}{\sqrt{2\sqrt{2} - 1} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}.$$

159. *Un fil sans poids* ABCA, *flexible et inextensible, passe sur deux poulies fixes* A, B *et porte une poulie mobile* C *chargée d'un poids en équilibre. Les rayons des poulies sont très petits et négligeables ; leurs axes sont parallèles entre eux et horizontaux. On donne* i, *inclinaison de* AB *sur l'horizon ;* $2l$, *longueur de* AC + CB ; $2e$, *rapport* $\frac{AB}{AC + CB}$; 2P, *valeur du poids.*

On demande les longueurs, les inclinaisons et les tensions respectives des cordons AC, CB.

Appliquer les formules au cas particulier :

$$= 30^\circ \quad e = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad l = P = \sqrt{7} \qquad \text{(sic).}$$

(*Bacc. ès sciences, Rennes, 1888.*)

Les tensions T, T′ des deux brins CA, CB du fil sont égales ;

par suite la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB} = 2\alpha$ est verticale. Nous avons donc

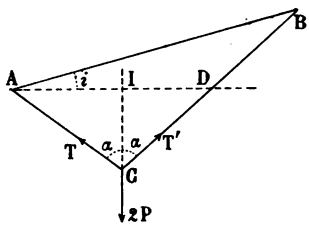
$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{CB}{\sin BAC};$$

mais $\widehat{BAC} = 90^\circ - \alpha + i$, $\widehat{ABC} = 90^\circ - \alpha - i$, et il viendra

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{AC + BC}{\cos(\alpha + i) + \cos(\alpha - i)},$$

d'où nous tirons

$$\sin \alpha = 2e \cos i.$$



La tension du fil sera donc

$$T = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{P}{\sqrt{1 - 4e^2 \cos^2 i}}.$$

Évaluons AC et BD.

Nous avons

$$\frac{BD}{\sin i} = \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{4el}{\cos \alpha},$$

d'où $$BC - CA = \frac{4el \sin i}{\cos \alpha}$$

et $$BC + CA = 2l.$$

De ces deux équations nous tirons finalement

$$BC = l\left[1 + \frac{2e \sin i}{\sqrt{1 - 4e^2 \cos^2 i}}\right],$$

$$CA = l\left[1 - \frac{2e \sin i}{\sqrt{1 - 4e^2 \cos^2 i}}\right].$$

Pour que CA soit positive, il faut

$$2e \sin i < \sqrt{1 - 4e^2 \cos^2 i},$$

d'où $$2e < 1.$$

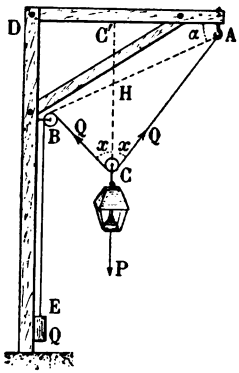
Il y a donc impossibilité pour l'exemple numérique donné.

160. *Position d'équilibre d'une lanterne.*

Soit P le poids de la lanterne et Q le contrepoids.

Les tensions des deux brins CA, CB seront égales, leur valeur commune sera Q en vertu de l'équilibre de la poulie fixe B. Par

conséquent, la poulie mobile C étant en équilibre, la verticale CC′ sera bissectrice de l'angle ACB et nous aurons en outre



$$P = 2Q \cos x,$$

d'où

$$(1) \qquad \cos x = \frac{P}{2Q}.$$

Pour que x convienne, il faut et il suffit que le triangle ABC soit possible. Or nous avons

$$\widehat{BAC} = 90^\circ - x - \alpha, \quad \widehat{ABC} = 90^\circ - x + \alpha,$$

$$\widehat{ACB} = 2x.$$

Chacun de ces angles devant être positif et inférieur à 180°, nous aurons

$$0 < x < 90^\circ - \alpha,$$

d'où

$$1 > \cos x > \sin \alpha.$$

Par suite les conditions de possibilité s'écriront

$$Q > \frac{P}{2} > Q \sin \alpha.$$

Ces conditions étant remplies et connaissant x, le triangle ABC se construira facilement.

La pression p sur la poulie B se calcule aisément; on a, en effet,

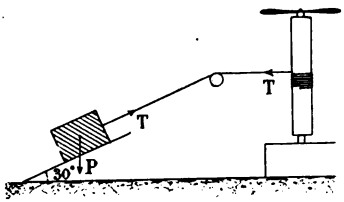
$$p = 2Q \cos \frac{\widehat{CBE}}{2} = 2Q \cos \frac{x}{2},$$

ou bien en tenant compte de (1) et éliminant x

$$p = \sqrt{Q(P + 2Q)}.$$

161. *Un corps de poids* P *placé sur un plan incliné de* 30° *est fixe à l'extrémité d'une corde qui passe sur une poulie de renvoi placée au sommet du plan et s'enroule sur le treuil d'un cabestan. On demande quelle force il faudra exercer à l'extrémité des manivelles pour maintenir le corps en équilibre. Le rayon du treuil est égal à* 10^{cm} *et les manivelles ont* 1 *mètre.* (*On négligera les résistances passives.*)

Décomposons le poids P du corps suivant la ligne de pente et la normale au plan incliné, cette dernière force sera détruite par la résistance du plan, et la première composante sera égale à la tension T de la corde.



Nous aurons donc

$$T = P \sin 30^\circ = \frac{P}{2}.$$

D'autre part, il viendra en vertu de l'équilibre du cabestan et en représentant par F la force inconnue : $T \times 10 = F \times 100$,

d'où
$$F = \frac{T}{10} = \frac{P}{20}.$$

162. *Trois hommes pesant chacun* 75^{kg} *se proposent d'élever à l'aide du treuil des carriers une pierre pesant* 2500^{kg}. *Les rayons du cylindre et de la roue étant de* $0^m,18$ *et de* 3^m, *à quelle distance de l'axe devront-ils se placer ?*

Soit x cette distance, nous aurons en prenant les moments par rapport à l'axe du treuil

$$3 \times 75 \times x = 2500 \times 0,18,$$

d'où

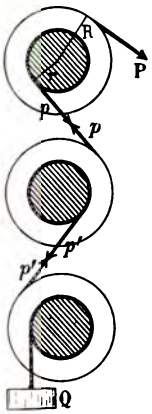
$$x = 2^m.$$

Le rayon de la roue à chevilles étant de 3^m on voit que le problème est possible.

163. *Trouver la relation qui existe entre la puissance et la résistance dans le système des trois tours indiqué par la figure.*

Soient r, r', r'', R, R', R'' les rayons des petits et des grands cylindres, P la puissance, le poids Q qui figure la résistance et enfin p, p' les tensions des cordons qui passent d'un petit

cylindre sur un grand, nous aurons en exprimant que chacun des tours est en équilibre



$$RP = rp,$$
$$R'p = r'p',$$
$$R''p' = r''Q.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre, il viendra

$$R.R'.R''.P = r.r'.r''.Q,$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{rr'r''}{RR'R''}.$$

Dans le cas de n treuils et en supposant

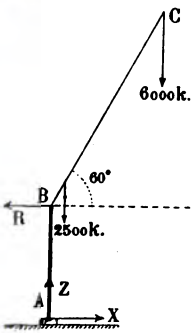
$$r = r' = r'' = \ldots, \qquad R = R' = R'' = \ldots$$

nous aurons

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

164. *L'arbre vertical* AB *d'une grue* ABC *est maintenu en* B *par un anneau horizontal, tandis que son extrémité* A *repose dans une crapaudine. Le tirant* BC *fait un angle de* 150° *avec* AB. *La verticale du centre de gravité de la grue rencontre* BC *au dixième de sa longueur à partir de* B. *Le poids de la grue est* 2500 *kilogrammes. En* C *est suspendu un poids de* 6000 *kilogrammes. Sachant que* AB = 1m,378 *et* BC = 3m,72, *on demande :* 1° *la résistance du collier* B ; 2° *la direction et la grandeur de la résistance de la crapaudine.*

(*Conc. acad. Douai, 1873.*)



La réaction R du collier est normale à la direction verticale de l'arbre AB.

Quand il y aura équilibre, R et la réaction S de la crapaudine seront dans un plan avec le poids de la grue et celui qui est suspendu en C. Nous définirons S en grandeur et direction par ses composantes X et Z, l'une horizontale, l'autre dirigée suivant AB. Ceci posé, projetons sur l'horizontale et la verticale

et prenons les moments par rapport au point B; il viendra

$$Z = 6000^{kg} + 2500^{kg} = 8500^{kg},$$

$$X - R = 0,$$

$$1{,}378\,X = \frac{1}{2}(2500 \times 0{,}372 + 6000 \times 3{,}72);$$

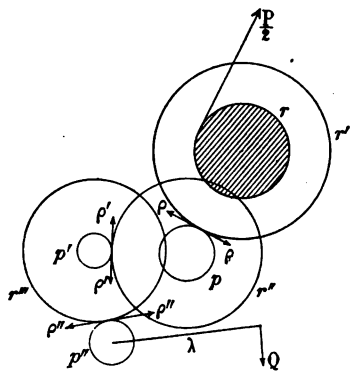
d'où nous tirons

$$X = R = 8436^{kg} \text{ environ.}$$

En résumé la réaction du collier sera de 8500^{kg}, et les composantes de celle de la crapaudine seront

$$X = 8436^{kg}, \qquad Z = 8500^{kg}.$$

165. *Dans une grue le treuil à engrenages est ainsi formé : sur l'axe de la manivelle de rayon* λ *est un pignon de* 9 *dents engrenant avec une roue de* 54 *dents ; sur l'axe de cette roue, un pignon de* 9 *dents, engrenant avec une seconde roue de* 54 *dents ; sur l'axe de la seconde roue, un pignon de* 11 *dents, engrenant avec une roue de* 66 *dents, faisant corps avec le treuil. On suppose en outre que la longueur* λ *de la manivelle est triple du rayon r du treuil et on demande l'effort* Q *à exercer pour élever un poids* $P = 30000$ *kilogrammes.*



Appelons p, p', p'' les rayons des pignons et r, r', r'', r''' ceux des roues.

Il se développe dans la position d'équilibre au contact d'un pignon et de la roue qui le touche des actions égales et de signes contraires, l'une agissant sur la roue, l'autre sur le pignon.

Nous aurons, en écrivant que chacun des couples en contact

est en équilibre,

$$\frac{P}{2} r = \rho r',$$

$$\rho p = \rho' r'',$$

$$\rho' p' = \rho'' r''',$$

$$\rho'' p'' = Q\lambda,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{P}{2} \cdot rpp'p'' = Q\lambda r'r''r''',$$

et

$$Q = \frac{rpp'p''}{2\lambda r'r''r'''} P.$$

Remarquons que si l'on considère une roue et un pignon en contact leurs rayons sont proportionnels aux nombres des dents, et introduisons les données de l'énoncé ; il viendra

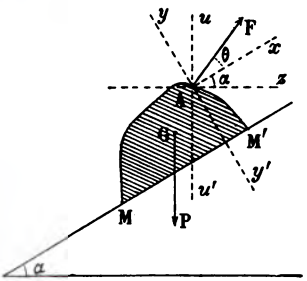
$$Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{66} \cdot \frac{9}{54} \cdot \frac{9}{54} \cdot 30\,000,$$

d'où

$$Q = 23 \text{ kilogrammes environ.}$$

166. *Équilibre d'un corps reposant sur un plan incliné parfaitement poli.*

Soit P le poids du corps appliqué à son centre de gravité G et supposons-le soumis à l'action d'une force F, destinée à le maintenir en équilibre sur le plan, cette force étant appliquée en un point A.



Il faut et il suffit pour l'équilibre que F et P admettent une résultante normale au plan, dirigée de façon à maintenir l'adhérence du corps au plan, et perçant le plan à l'intérieur du polygone convexe d'appui.

Il suit de là que F et P sont situées dans un même plan ver-

tical coupant le plan incliné suivant une ligne de pente. Figurons la section par ce plan.

Soit α l'inclinaison du plan et θ l'angle de F avec la parallèle ascendante Ax à la ligne de pente ; la somme des projections des forces sur Ax sera nulle et nous aurons

$$(1) \qquad F\cos\theta - P\sin\alpha = 0.$$

En outre, la somme de leurs projections sur Ay sera négative et il viendra

$$(2) \qquad F\sin\theta - P\cos\alpha < 0.$$

Éliminons P entre (1) et (2) nous obtiendrons, $\sin\alpha$ étant positif,

$$\cos(\theta + \alpha) > 0.$$

Cette inégalité exprime, comme on le voit aisément en traçant l'horizontale Az, que la direction AF doit être située à droite de la verticale uu' ; mais en vertu de (1) on a $\cos\theta > 0$, et en tenant compte de cette nouvelle condition on voit que AF ne doit pas sortir de l'angle uAy'.

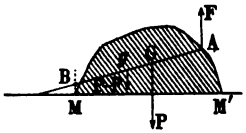
Mais tout ceci n'est pas suffisant, et il nous faut maintenant exprimer que les forces ne font pas basculer le corps, c'est-à-dire que leur résultante perce le plan à l'intérieur du polygone convexe d'appui. Pour cela, considérons les tracés M, M' du polygone d'appui sur le plan de la figure; la résultante de P et F d'ailleurs située dans le plan AMM' devra percer le plan entre M et M', et nous exprimerons cette condition en évaluant la somme des moments des forces par rapport à M et M' et en écrivant que la première quantité est positive et la seconde négative ou inversement suivant la convention de signe adoptée pour les moments.

Les deux inégalités que l'on obtiendra ainsi délimiteront de nouveau θ et diminueront en général le premier champ $\widehat{uAy'}$ de ses variations.

Cas particulier. — Supposons le plan horizontal, alors $\alpha = 0$ et (1) s'écrira

$$F\cos\theta = 0,$$

d'où $\theta = \pm 90°$.



La force F doit donc être verticale. Supposons F dirigée de haut en bas et plaçons-nous dans le cas de la figure ; on voit qu'il y aura équilibre pour toute grandeur de F.

Enfin, supposons F de sens contraire à P et $P > F$; composons d'ailleurs ces deux forces, leur résultante $P - F$ coupera AG en un point g qui devra être situé à droite de B ; or nous avons

$$\frac{gA}{P} = \frac{GA}{P - F},$$

d'où

$$gA = \frac{P}{P - F} GA,$$

et il viendra

$$\frac{P}{P - F} GA < AB,$$

d'où nous tirons finalement

$$F < \frac{BG}{AB} P.$$

On discuterait de même quand on a $P < F$.

167. *Deux poids* P *et* P′ *reliés entre eux par un cordon inextensible et très fin se font équilibre sur deux plans inclinés de même hauteur ; le cordon qui les unit passe sur une petite poulie fixée à l'arête horizontale commune et ses deux brins sont parallèles aux lignes de pente des deux plans. Trouver :*

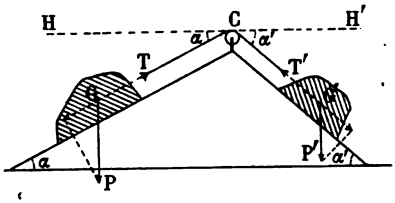
1° *La relation qui doit exister entre les inclinaisons* α *et* α' *des deux plans et les poids* P *et* P′ ;

2° *Montrer que si l'on fait glisser les poids sur les deux plans, le centre de gravité reste toujours à la même hauteur.*

1° Le poids P est en équilibre en vertu de l'existence de la réaction normale du plan et de la tension T du fil. Par conséquent nous aurons en projetant les forces sur la ligne de pente

$$T = P \sin \alpha.$$

Il viendra pareillement en exprimant l'équilibre du poids P',



$$T' = P' \sin \alpha',$$

mais $T = T'$; en effet s'il n'en était pas ainsi, le fil glisserait sur la poulie ou plutôt la ferait tourner et l'équilibre n'existerait pas, par conséquent nous obtiendrons

$$(1) \qquad P \sin \alpha = P' \sin \alpha',$$

ou bien encore, l et l' étant les longueurs des plans,

$$\frac{P}{l} = \frac{P'}{l'}.$$

2° Traçons l'horizontale HH' tangente à la poulie et soit x la distance à cette droite du centre de gravité du système des deux poids, il viendra en prenant les moments par rapport au plan perpendiculaire à celui de la figure et passant par HH'

$$(P + P')x = P.CG \sin \alpha + P'.CG' \sin \alpha',$$

ou bien en tenant compte de (1),

$$(P + P')x = P \sin \alpha (CG + CG') = Pd \sin \alpha,$$

d étant la longueur du cordon.

Nous obtenons donc finalement

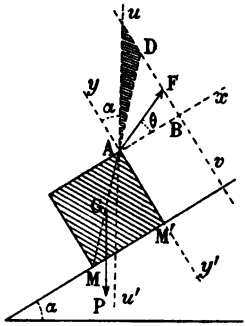
$$x = \frac{Pd \sin \alpha}{P + P'} = \frac{\sin \alpha \sin \alpha'}{\sin \alpha + \sin \alpha'} d.$$

x est donc bien indépendante de la position du système.

168. *Equilibre d'un cube pesant, reposant par une face sur un plan incliné parfaitement poli et maintenu par une force* F *appliquée au milieu de l'arête la plus élevée.*

Le poids P du cube et la force F doivent être situés dans un même plan normal au plan incliné ; d'ailleurs ce plan étant vertical comme contenant P coupera le plan incliné suivant une

ligne de pente. Il suit aussi de là que les côtés du carré d'appui seront parallèles aux horizontales et aux lignes de pente du plan incliné. Soit θ l'angle de AF avec Ax, il viendra en projetant sur Ax et Ay,



$$(1) \qquad F\cos\theta = P\sin\alpha,$$

$$(2) \qquad F\sin\theta - P\cos\alpha < 0,$$

d'où nous tirons

$$(3) \qquad \cos(\theta+\alpha) > 0.$$

Ceci posé, portons $AB = P\sin\alpha$, traçons Bv parallèle à yy' ; d'après (1) l'extrémité F de la force AF devra appartenir à la droite Bv, et l'inégalité (3) exprime que la direction AF est contenue dans l'angle uAy'.

Il reste maintenant à écrire que la résultante des forces P et F perce le plan à l'intérieur du carré d'appui. Pour cela (166) nous prendrons les moments par rapport à M et à M′ et nous aurons

$$M^t_M P + M^t_M F < 0,$$

$$M^t_{M'} P + M^t_{M'} F > 0\ ;$$

(en considérant le moment comme positif, quand la force entraîne son bras de levier dans le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre), ou bien

$$P\sin\alpha - P\cos\alpha + 2F\sin\theta - 2F\cos\theta < 0,$$

$$P\sin\alpha + P\cos\alpha - 2F\cos\theta > 0,$$

ou bien encore, en éliminant F et P à l'aide de (1),

$$(4) \qquad 2\sin\alpha\sin\theta - \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\cos\theta < 0,$$

$$(5) \qquad \cos\theta(\cos\alpha - \sin\alpha) > 0.$$

Cette dernière inégalité nous donne, en remarquant que $\cos\theta$ est positif,

$$\cos\alpha - \sin\alpha > 0.$$

Par conséquent, pour que l'équilibre soit possible, le cube repo-

sant sur le plan par une face, il faut d'abord que l'inclinaison du plan incliné ne dépasse pas 45°.

Considérons maintenant l'inégalité (4), nous aurons en divisant par la quantité positive $2 \sin \alpha \cos \theta$,

$$\operatorname{tg} \theta < \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Cette inégalité n'est pas vérifiée pour toute valeur de θ comprise entre $-90°$ et $90° - \alpha$, c'est-à-dire pour toute direction AF comprise dans l'angle uAy', remplaçons en effet θ par $90° - \alpha$, nous aurons

$$\operatorname{tg} \theta - \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \cot \alpha - \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2 \sin \alpha} > 0;$$

par conséquent elle assignera une nouvelle valeur maxima $\theta' = \widehat{DAx}$, de sorte que nous voyons finalement que la direction AF devra être contenue dans l'angle $\widehat{DAy'}$. Quand AF viendra en coïncidence avec AD, le cube sera sur le point de basculer, en d'autres termes la résultante des forces P et F passera par le point M.

L'angle θ étant connu entre $90° - \widehat{yAD}$ et $-90°$, on aura

$$F = \frac{P \sin \alpha}{\cos \theta}.$$

169. Genou. — Cette machine est composée de deux barres ou verges AO, BO articulées en O. L'extrémité A de la première est liée par une charnière à une barre inébranlable AC, et l'extrémité B de la seconde est assujettie à glisser dans la rainure fixe AC.

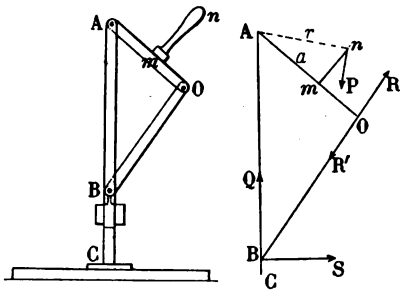
La puissance P est appliquée en n et dans la direction la plus favorable, c'est-à-dire perpendiculairement à An.

La résistance Q est appliquée en B dans la direction BA.

Étudions l'équilibre de cette machine.

Outre les forces P et Q nous devons considérer la réaction

normale S de la rainure sur l'extrémité B et les actions mutuelles R, R′ égales et directement opposées qui se manifestent à la charnière O.



D'ailleurs, en vertu de l'équilibre de la verge OB, R′ et R seront dirigées suivant cette tige.

Ceci posé, écrivons que le levier AO est en équilibre, nous aurons en prenant les moments par rapport à A, et en posant $An = r$, $AO = a$,

$$(1) \qquad rP = a \sin O . R.$$

Il viendra ensuite en vertu de l'équilibre des trois forces R′, Q et S,

$$(2) \qquad R = R' = \frac{Q}{\cos B} = \frac{S}{\sin B},$$

et nous tirerons des relations (1) et (2)

$$(3) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{a}{r} \frac{\sin O}{\cos B},$$

$$R = R' = \frac{Q}{\cos B}, \qquad S = Q \operatorname{tg} B.$$

Discutons la relation (3). A mesure que B diminue, O augmente ; par suite P étant donné, Q augmentera à mesure que les deux côtés du genou se rapprocheront de AC et pourra acquérir une valeur supérieure à toute quantité donnée.

On voit encore que la puissance a un avantage d'autant plus grand que le rapport $\frac{a}{r}$ est petit.

Genou isocèle. — Le genou est isocèle quand on a $AO = BO$; alors $\sin O = 2 \sin B \cos B$ et la relation (3) s'écrit

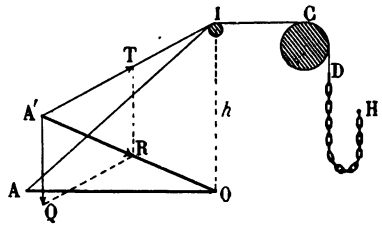
$$\frac{P}{Q} = \frac{2a}{r} \sin B.$$

Le genou peut remplir le même but que la vis. On s'en sert pour exercer à l'aide d'une puissance médiocre des pressions considérables ou pour former sur certains corps de fortes empreintes. Il a l'avantage sur la vis d'être d'une construction plus simple.

170. Pont-levis a chaine de Poncelet. — Soit OA le tablier mobile autour de la charnière O. Son poids peut se décomposer en deux autres, l'un Q appliqué en A, l'autre appliqué en O et détruit par la fixité de la charnière.

A l'extrémité A est attaché un cordon qui passe sur une poulie très petite I, puis sur une autre C et supporte à sa seconde extrémité une chaîne DH pesant p par mètre courant et de longueur L. Cette chaîne destinée à servir de contrepoids au tablier a une extrémité attachée en un point H voisin de la verticale du point D. On suppose OI verticale, $OI = h$ et $AI = a$.

Nous nous proposons de rechercher les relations qui doivent exister entre les données précédentes pour que le tablier soit en équilibre dans toute position.



Considérons la position OA' du tablier, pour qu'il soit en équilibre il faut que la résultante R du poids Q et de la tension du fil soit dirigée suivant A'O.

Nous aurons donc, les triangles ART et AOI étant semblables,

$$\frac{Q}{h} = \frac{T}{A'I}.$$

Soit x la longueur dont s'abaisse l'extrémité D de la chaîne, on aura

$$A'I = AI - x = a - x,$$

et il viendra

$$(1) \qquad \frac{Q}{h} = \frac{T}{a - x}.$$

Le point D étant descendu de x, supporte le poids $p\left(L-\frac{x}{2}\right)$ de la chaîne et H le poids $p\,\frac{x}{2}$, par suite la poulie fixe étant en équilibre, nous aurons

$$(2) \qquad T = p\left(L-\frac{x}{2}\right),$$

et nous obtiendrons en éliminant T entre (1) et (2)

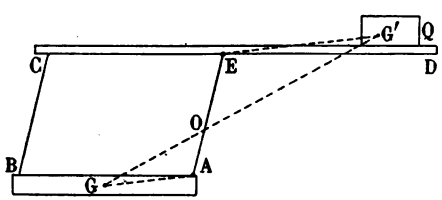
$$Q(a-x) = ph\left(L-\frac{x}{2}\right).$$

Le pont-levis devant être en équilibre indifférent, l'égalité précédente sera vérifiée quel que soit x et nous aurons

$$2Q = ph, \qquad aQ = phL.$$

Telles sont les deux conditions cherchées.

171. Pont-levis a flèche. — « Soit AB le tablier d'un pont, mobile autour d'un axe horizontal A; deux chaînes BC partent des deux côtés du tablier, et vont s'attacher aux extrémités de deux flèches CD formant un cadre mobile autour d'un axe horizontal E; un contrepoids Q supporté par les deux flèches, sert à équilibrer le poids du tablier. On prend EC = AB et BC = AE; la figure ABCE est un parallélogramme dans toutes ses positions; il en résulte que l'angle dont tourne le tablier est toujours égal à celui dont tournent les flèches. Nous pouvons concevoir que chaque chaîne soit remplacée par deux masses égales chacune à la moitié de sa masse et placées à ses deux extrémités; soient G, G′ les centres de gravité du tablier d'une part et des flèches avec le contrepoids Q d'autre part, en y comprenant de part et d'autre les masses qui tiennent lieu des moitiés des chaînes; soient en outre, P et P′ les poids de ces deux parties du système;



le point d'application de la résultante des forces parallèles et de

même sens P, P′ appliquées aux points G, G′, sera le centre de gravité du système tout entier. On détermine le contrepoids Q, de manière à satisfaire à deux conditions, savoir : 1° que la ligne EG′ soit parallèle à AG, pour une position particulière du système; 2° que l'on ait la proportion

$$\frac{P}{P'} = \frac{EG'}{AG}.$$

Le parallélisme de EG′ et de AG se conservera dans toutes les positions que l'on peut donner au système; par conséquent, d'après la seconde des conditions précédentes, le centre de gravité de tout le système se trouve en un point O, situé sur AE et tel que

$$\frac{AO}{EO} = \frac{AG}{EG'} = \frac{P'}{P}.$$

Il résulte de là que le pont-levis, ainsi constitué, est en équilibre indifférent dans toutes les positions qu'on peut lui donner. » (*)

Pont-levis de Bélidor. — Au lieu d'accrocher les chaînes qui supportent le tablier d'un pont-levis à flèches munies de contrepoids, on peut faire passer ces chaînes sur des poulies placées au-dessus du tablier et suspendre à leurs extrémités des contrepoids destinés à équilibrer le poids de ce tablier. On peut, en outre, obliger ces contrepoids à glisser le long de courbes fixes construites de façon que le pont-levis reste en équilibre dans toutes ses positions.

EXERCICES

135. — Aux deux extrémités d'un levier droit et horizontal sont suspendus deux poids, l'un de 500^{gr}, l'autre de 1225^{gr} ; le levier pèse 450^{gr} et a la forme d'un prisme droit de $0^{m},60$ de long, et la subs-

(*) Delaunay, *Mécanique rationnelle*. Masson, Paris, 1856.

tance dont il est formé est homogène. On demande où doit être placé le point d'appui pour qu'il y ait équilibre.

(*Conc. acad. Paris, 1878.*)

136. — Une poutre homogène AB portant en A un poids de 30^{kg} et en B 80^{kg} est en équilibre sur le point d'appui C. On a $AC = 2^{m},7$, $BC = 1^{m},4$. Calculer le poids de la poutre.

(*Conc. acad. Bordeaux, 1873.*)

137. — Dans un levier AB du poids de 1^{kg} fixé en C, on a $AC = 2^{dm}$, $BC = 3^{dm}$. Un poids P est soutenu par deux fils AD, BD de 4^{dm} et de 3^{dm} de long. On demande quelle force verticale il faut appliquer en A pour maintenir le levier horizontal.

(*Conc. acad. Bordeaux, 1875.*)

138. — Dans un levier coudé AOB, mobile autour du point O, on a $AO = 2OB$, $\widehat{AOB} = 150°$ et OB est horizontal. Quel doit être le rapport des poids P et Q suspendus en A et B pour que le levier soit en équilibre?

(*Bacc. Paris, 1879.*)

139. — Trouver la position d'équilibre du levier AOB mobile autour de O et dont les extrémités sont repoussées par un point fixe I avec des intensités données P, Q, sachant que l'on a $OA = OB = OI$. — Stabilité ?

140. — Aux extrémités A et B d'un levier coudé AOB sont appliquées des forces P et Q respectivement perpendiculaires à OA et à OB. On connaît $\widehat{AOB} = \alpha$, $OA = a$, $OB = b$, p le poids de l'unité de longueur du levier. Trouver la condition d'équilibre.

(*Saint-Cyr, 1896.*)

141. — Un solide est formé de 2 barres homogènes AB, BC dont les longueurs sont a et b et qui sont à angle droit l'une sur l'autre. Il est mobile autour de A et il prend sous l'action de la pesanteur une certaine position d'équilibre. 1° Déterminer l'angle α que fait AB avec la verticale AX quand l'équilibre est établi ; 2° après avoir indiqué le calcul de cet angle on suppose $b = a\sqrt{3}$, et l'on effectuera alors le calcul en degrés, minutes et secondes.

(*Brevet de l'ens. spécial, Lille, 1881.*)

142. — Une barre droite homogène AB fixée en A fait un angle

de 30° avec l'horizon. Quelle est la force F perpendiculaire à la barre et appliquée à l'extrémité B qui la tient en équilibre dans cette position, sachant qu'à $0^m,30$ du point A est suspendu un poids Q de 10^{kg}, que la barre pèse 2^{kg} et que sa longueur est $1^m,50$. Généraliser le problème et le résoudre en prenant pour inconnue la longueur de la barre sachant qu'elle pèse p kil. par mètre courant. Condition de possibilité.

(*Conc. acad. Montpellier, 1875.*)

143. — Étudier la sensibilité d'une balance, sans faire usage de la formule connue, mais en composant les forces en action.

144. — Un corps paraît peser 15^{kg} quand on le place dans l'un des plateaux d'une balance et $15^{kg},5$ quand on le place dans l'autre. Trouver son poids réel.

145. — L'un des bras de levier d'une balance fausse surpasse le plus petit de la fraction $\frac{1}{m}$ de sa longueur. Quand on se sert de cette balance, on met aussi souvent les poids dans un plateau que dans l'autre. Calculer le gain ou la perte du marchand.

146. — Pour peser un corps, on se sert d'une balance dont les bras du fléau inégaux sont cependant très peu différents. Suivant que l'on place le corps dans l'un ou l'autre des plateaux, les poids marqués sont P ou $P - \varepsilon$. Démontrer que $P - \frac{\varepsilon}{2}$ représente le poids approché du corps avec une erreur absolue par excès inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$.

147. — Un poids de 2580^{kg} est suspendu à la chape d'une poulie mobile ; les cordons parallèles de cette poulie sont attachés aux cylindres de deux treuils A et B ; deux forces agissent sur les manivelles de ces treuils et font équilibre au poids. Le rapport du rayon à la manivelle est $\frac{3}{35}$ pour le treuil A, et $\frac{5}{36}$ pour le treuil B. Trouver la valeur de ces forces.

(*Dipl. ens. spécial, Rennes, 1879.*)

148. — Les deux cordons d'une poulie mobile en équilibre font un angle de 18°. Calculer à 0,001 près le rapport de la puissance à

la résistance. En partant des propriétés du décagone régulier, on calculera les lignes trigonométriques dont on aura besoin.

(*Diplôme d'études, Toulouse, 1882.*)

149. — Avec un treuil différentiel, on veut élever un poids de 150^{kg}. On demande : 1° l'effort qu'il faut exercer, sachant que la longueur de la manivelle est de 50^{cm} et que les rayons des deux cylindres sont égaux à 10^{cm} et à 6^{cm} ; 2° la hauteur d'ascension du corps, qui correspond à un tour de manivelle.

150. — Un treuil des carriers porte un poids inconnu P en un point A de la circonférence de sa grande roue, le rayon $OA = R$ de cette roue fait un angle α avec la verticale. Sur le cylindre de rayon r de ce premier treuil s'enroule un cordon C qui agit sur la roue de rayon R′ d'un second treuil, dont le cylindre a un rayon r'. Enfin sur ce dernier cylindre s'enroule un cordon C′ qui est parallèle à un plan incliné d'un angle β sur l'horizon et qui maintient en équilibre sur celui-ci un fardeau de poids Q. Calculer le poids Q, en négligeant tous les frottements.

Application. — $R = 5r$, $R' = 5r'$ $B = 30°$, $\alpha = 60°$, $Q = 1000^{kg}$.

(*Diplôme, Alger, 1881.*)

151. — En agissant sur la manivelle d'un cabestan établi au sommet d'un plan incliné AB, on maintient en équilibre sur ce plan un poids M de 2580^{kg}. Quel est l'effort exercé sur la manivelle du cabestan, sachant que la longueur AB du plan incliné vaut 2 fois $\frac{1}{2}$ sa hauteur AC et que le rayon du treuil est les $\frac{2}{9}$ de la longueur de la manivelle ? On admet que, grâce à une poulie de renvoi, la corde se maintient parallèle à AB.

(*Diplôme d'études, Nantes, 1877.*)

152. — Calculer dans la chèvre la tension du câble qui la maintient.

153. — Dans un cric, la manivelle a une longueur $l = 40^{cm}$, le pignon de cette manivelle a pour rayon $r = 5^{cm}$, ce pignon engrène avec une roue dentée de rayon $R = 12^{cm}$, enfin le pignon qui fait corps avec cette roue et qui fait mouvoir la crémaillère a 6^{cm} de rayon. Calculer l'effort à exercer pour soulever un poids de 320^{kg}.

154. — Un cône circulaire droit repose par sa base sur un plan incliné parfaitement poli. Trouver l'intensité et la direction qu'il faut donner à une force F appliquée au sommet pour tenir le cône en équilibre.

155. — Deux plans inclinés sont rapprochés par leur arête culminante ; ils font entre eux un angle de 110°. Leurs charges sont retenues l'une à l'autre par une corde passant sur une poulie de renvoi et qui reste parallèle à chacun des plans. Les charges sont de 342^{kg} et 567^{kg}. Elles restent en équilibre. On propose de calculer les angles des plans inclinés avec l'horizon.

(*Diplôme, Douai.*)

156. — Deux plans inclinés polis se coupent suivant une horizontale et à angle droit. Une chaîne homogène pesante à mailles très petites repose sur ces plans.

1° Déterminer la position d'équilibre de la chaîne.

2° Trouver le lieu que décrit son centre de gravité, quand on la fait glisser sur les plans inclinés.

157. — Un cube repose sur un plan horizontal parfaitement poli et est sollicité par une force appliquée à l'un quelconque de ses sommets. Étudier son équilibre et la stabilité.

CINÉMATIQUE

CHAPITRE I

MOUVEMENT DU POINT

172. Dans le mouvement du point on considère :

1° Sa TRAJECTOIRE, ou la route qu'il suit ;

2° L'ESPACE qu'il parcourt ; cet espace est compté à partir d'une *origine* donnée sur la trajectoire ;

3° Le TEMPS.

Le mouvement est dit *rectiligne* ou *curviligne*, suivant que la trajectoire est une *droite* ou une *courbe*.

On prend, en général, comme unité d'espace le *mètre* et pour unité de temps la *seconde de temps solaire moyen*.

On appelle *loi des espaces* du point une relation

$$e = f(t) \tag{1}$$

qui lie l'espace et le temps et qui, par suite, donne l'une de ces deux quantités, l'autre étant connue.

En d'autres termes, si l'on connaît la trajectoire, l'équation (1) donne la solution des deux problèmes :

1° Trouver la position du mobile à un instant donné ;

2° Trouver l'époque t à laquelle le mobile occupe une position donnée.

Il est souvent utile de construire la courbe représentée par l'équation (1) ; on adopte alors deux axes rectangulaires, on porte le temps en abscisse et l'espace en ordonnée et on obtient ainsi le *diagramme de la loi des espaces*.

Quand $$f(t) = at + b,$$

a et b étant deux constantes, le mouvement est dit *uniforme*.

Il est *uniformément varié* quand on a

$$f(t) = at^2 + bt + c,$$

a, b et c étant des quantités constantes.

Enfin, le mouvement est dit *varié* dans tous les autres cas.

173. Vitesse. — Quelles que soient la trajectoire et la loi du mouvement, on appelle *vitesse moyenne* du temps t au temps t', le rapport

$$V_m = \frac{e_{t'} - e_t}{t' - t} = \frac{f(t') - f(t)}{t' - t}$$

de l'espace parcouru au temps $t' - t$ employé à le parcourir.

La *vitesse à l'instant t* est la limite vers laquelle tend ce rapport quand t' tend vers t. La vitesse à l'instant t est donc la *dérivée* de l'espace par rapport au temps.

On représente géométriquement la vitesse par un segment porté sur la tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement, ayant pour origine le point de contact (c'est-à-dire le mobile) et pour longueur V_t.

Nous rappellerons, et ceci est facile à établir, que *la vitesse est égale au coefficient angulaire de la tangente au diagramme de la loi des espaces.*

174. Courbe indicatrice des vitesses. — Si par un point quelconque O de l'espace, pris pour origine, on construit les segments Ov, Ov', ... équipollents aux segments-vitesses d'un mobile, on obtient pour lieu des extrémités v, v', ... de ces segments une courbe appelée *indicatrice des vitesses* du mobile considéré.

175. Accélération. — 1° *Mouvement rectiligne.* — *L'accélération moyenne* du temps t au temps t' est, par définition, le rapport

$$\gamma_m = \frac{V_{t'} - V_t}{t' - t},$$

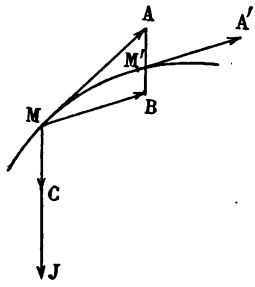
de la variation de vitesse à l'accroissement du temps $t' - t$. *L'accélération au temps t* est la limite vers laquelle tend ce rapport quand t' tend vers t.

Ainsi, dans un mouvement *rectiligne*, l'accélération au temps t est la dérivée de la vitesse ou bien encore la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps.

On représente l'accélération par un segment porté sur la droite trajectoire dans le sens du mouvement, et ayant pour origine le mobile à l'instant considéré.

2° *Mouvement curviligne.* — Soient M et M' les positions du mobile aux

époques t et t', $\overline{MA}$, $\overline{M'A'}$ les segments vitesses ; menons le segment $\overline{MB}$ équipollent à $\overline{M'A'}$, puis $\overline{MC}$ équipollent à $\overline{AB}$; l'*accélération moyenne* du temps t au temps t' a pour valeur, par définition, $\frac{MC}{t'-t}$ et se porte sur MC à partir de M. Elle sera donc représentée par le segment $\overline{MJ} = \frac{MC}{t'-t}$.



L'*accélération au temps t* est, en grandeur et direction, le segment limite du segment $\overline{MJ}$ quand t' tend vers t. On peut dire que l'accélération au temps t est la *dérivée géométrique* de la vitesse par rapport au temps.

On a, en effet,

$$\text{accél. moyenne} = \frac{(V') - (V)}{t' - t},$$

et

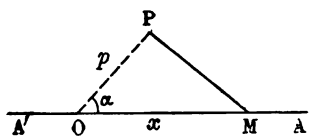
$$\text{accél. au temps } t = \lim \frac{(V') - (V)}{t' - t}.$$

Enfin, si l'on considère l'indicatrice des vitesses et le point (v) comme mobile avec Ov, il est aisé de voir que l'accélération du mobile considéré est équipollente à la vitesse de (v).

176. *Déterminer sur la droite* OA *un point* M (OM $= x$), *de telle façon qu'un mobile partant de* O *et parcourant la droite* OA *d'un mouvement uniforme avec la vitesse* v, *arrive en* M *en même temps qu'un autre mobile partant du point* P *à l'instant où le premier part de* O, *et parcourant la droite* PM *d'un mouvement uniforme avec la vitesse* $\frac{1}{2}v$. *On trouve, quand le problème est possible deux chemins tels que* PM. *Quel est le plus court? Comment doit-on choisir* P *pour que ces chemins soient rectangulaires?*

(*Bacc. spécial, Besançon, 1888.*)

Définissons la position du point P par la distance OP $= p$ et l'angle POA $= \alpha$; nous aurons en posant OM $= x$,



$$x = vt,$$

$$PM = \frac{1}{2}vt.$$

De ces relations nous tirons

$$PM = \frac{x}{2}.$$

Nous avons d'autre part, dans le triangle OPM,

$$\overline{PM}^2 = p^2 + x^2 - 2px \cos\alpha,$$

et il viendra après avoir remplacé PM par $\frac{x}{2}$ et ordonné,

$$(1) \qquad f(x) = 3x^2 - 8px \cos\alpha + 4p^2 = 0.$$

Or x doit être réelle et positive, par conséquent il faut

$$4\cos^2\alpha - 3 > 0,$$

$$\cos\alpha > 0,$$

ou bien, simplement,

$$\cos\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

c'est-à-dire

$$\alpha \leqslant 30^\circ.$$

Cette inégalité étant vérifiée, l'équation (1) ayant ses deux racines réelles et positives, le problème admettra deux solutions. Le chemin le plus court PM sera moitié de la plus petite racine et aura pour longueur

$$PM = \frac{p}{3}\left(2\cos\alpha - \sqrt{4\cos^2\alpha - 3}\right).$$

Soient PM′ et PM″ les deux chemins; lorsqu'ils seront rectangulaires, le triangle PM′M″ sera rectangle en P et nous aurons

$$\overline{PM'}^2 + \overline{PM''}^2 = \overline{M'M''}^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{x''^2}{4} = (x' - x'')^2,$$

ou

$$3(x' + x'')^2 - 14x'x'' = 0,$$

ou bien encore

$$8\cos^2\alpha - 7 = 0,$$

d'où

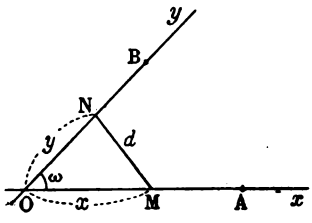
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

Le point P devra donc être situé sur la droite OD inclinée sur OA de $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{7}{8}}$.

177. *De deux points* A *et* B *partent au même instant, avec des vitesses* v *et* w, *deux mobiles se dirigeant d'un mouvement uniforme vers un même point* O. *On demande :* 1° *l'expression de la distance qui sépare les deux mobiles au bout du temps* t; 2° *le minimum de cette distance ;* 3° *le temps au bout duquel ce minimum est atteint.* (*On suppose connus les distances* $OA = a$, $OB = b$, *et l'angle* $AOB = \omega$). *On demande en outre :* 4° *de trouver le lieu des extrémités des droites, menées par un même point, parallèles et égales aux distances qui séparent les positions simultanées des deux mobiles ;* 5° *d'en déduire une construction géométrique des positions simultanées des deux mobiles, pour lesquelles la distance est un minimum.*

(*Institut agronomique, 1890.*)

1° Soient M et N les positions des deux mobiles à l'instant t et posons



$$OM = x, \qquad ON = y,$$

x et y étant comptées positivement dans les sens Ox et Oy; nous aurons

$$x = a - vt, \qquad y = b - wt.$$

Ceci posé, soit d la distance MN; nous avons

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \omega,$$

ou bien, en remplaçant x et y par leurs valeurs,

$$d^2 = (a - vt)^2 + (b - wt)^2 - 2(a - vt)(b - wt) \cos \omega.$$

2° et 3° On peut encore écrire cette relation, en développant,

$$d^2 = (v^2 + w^2 - 2vw \cos \omega)t^2 - 2(av + bw - aw \cos \omega - bv \cos \omega)t + a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega.$$

d^2, c'est-à-dire le trinome en t du second membre a un minimum, car $v^2 + w^2 - 2vw \cos \omega > 0$, et la valeur de t qui correspond à ce minimum est, comme on sait,

$$t' = \frac{av + bw - aw \cos \omega - bv \cos \omega}{v^2 + w^2 - 2vw \cos \omega}.$$

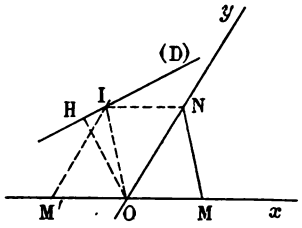
Ce minimum se réalisera pendant le mouvement si $t' > 0$, c'est-à-dire si

$$av + bw - aw \cos\omega - bv \cos\omega > 0.$$

Enfin, le minimum du trinome considéré a pour valeur

$$d^2 = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (v^2 + w^2 - 2vw \cos\omega)(a^2 + b^2 - 2ab \cos\omega) \\ \qquad - (av + bw - aw \cos\omega - bv \cos\omega)^2 \end{array} \right\}}{(v^2 + w^2 - 2vw \cos\omega)}.$$

4° Menons le segment $\overline{OI}$ égal et parallèle au segment $\overline{MN}$, et portons $\overline{OM'} = -\overline{OM}$. M'I est parallèle à Oy.



Le lieu du point I est précisément la trajectoire de ce point, considéré comme animé de deux mouvements simultanés

$$OM' = -a + vt,$$
$$ON = b - wt,$$

l'un suivant Ox, l'autre suivant Oy.

Ces deux mouvements étant rectilignes et uniformes, on sait que le mouvement résultant est aussi rectiligne et uniforme.

Ainsi, le lieu du point I est une droite (D), qu'il sera d'ailleurs facile de construire en donnant à t deux valeurs particulières.

5° Le minimum de $OI = d$ s'obtient en abaissant la perpendiculaire OH sur (D). Les projections obliques M'_1, N_1 de H sur les axes feront connaître le segment M_1N_1 (M_1 étant le symétrique de M'_1 par rapport à O), qui joint les deux mobiles à l'instant où leur distance est minima.

178. *On lance un projectile verticalement ; exprimer, en fonction de l'intensité g de la pesanteur et de sa vitesse initiale v_0, le temps qu'il met pour atteindre la moitié de la hauteur du point le plus élevé de sa course.*

(*Bacc., Dijon, 1879.*)

Les formules du mouvement s'écrivent

(1) $$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

(2) $$v = v_0 - g t,$$

(3) $$v^2 - v_0^2 = -2ge.$$

Si dans (3) nous faisons $v = 0$, nous obtenons

$$e = \frac{v_0^2}{2g},$$

qui est la hauteur maxima d'ascension du mobile ; par conséquent, en remplaçant e par $\frac{v_0^2}{4g}$ dans (1) il viendra,

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + \frac{v_0^2}{4g} = 0,$$

d'où nous tirons

$$t' = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{v_0}{g}, \qquad t'' = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \frac{v_0}{g}.$$

Les deux valeurs de t conviennent : le mobile passera au point considéré deux fois, au bout de t'' en montant et au temps t' quand il descendra.

179. *Un corps est lancé de bas en haut suivant la verticale ; on note l'intervalle de temps* θ *qui s'écoule entre son passage à un point* A, *situé à une distance* h *du point de départ, dans le mouvement ascensionnel, et son second passage au même point dans le mouvement descendant. Calculer la vitesse initiale et la durée du mouvement.*

Si e représente la distance du mobile à l'origine des espaces, l'unique formule

(1) $$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

conviendra à la fois à l'ascension et à la chute ; par conséquent, en remplaçant dans (1) e par h, nous aurons une équation du deuxième degré en t qui admettra précisément pour racines les temps t' et t'' du passage du mobile à la position A. Écrivons

cette équation

$$\frac{1}{2} gt^2 - v_0 t + h = 0.$$

Par hypothèse,

$$t'' - t' = \theta;$$

mais

$$(t'' - t')^2 = (t' + t'')^2 - 4t't'' = \frac{4v_0^2}{g^2} - 8\frac{h}{g},$$

et il viendra

$$\theta^2 = 4\frac{v_0^2}{g^2} - 8\frac{h}{g},$$

d'où nous tirons pour la vitesse initiale,

$$v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{g(g\theta^2 + 8h)}.$$

La formule

$$v = v_0 - gt$$

nous donne pour la durée de l'ascension $t = \frac{v_0}{g}$; la durée de la chute est la même; le mobile se meut pendant le temps

$$T = 2\frac{v_0}{g},$$

ou bien

$$T = \sqrt{\frac{g\theta^2 + 8h}{g}}.$$

180. *Deux observateurs* A *et* B *sont placés, le premier à la partie supérieure, le deuxième à la partie inférieure d'un puits de mine. L'observateur* A *donne un signal en frappant sur une cloche; au moment où l'observateur* B *entend la cloche, il envoie avec une arme à feu un projectile verticalement de bas en haut. L'observateur* A *note le moment où il entend le bruit de l'arme et celui où le projectile atteint l'orifice. On demande quelle est la profondeur du puits et quelle est la vitesse initiale avec laquelle le projectile est sorti de l'arme, sachant qu'il s'est écoulé 2 secondes entre l'instant où l'observateur a donné le premier signal et celui où il a entendu le bruit de la détonation et que le*

projectile a passé à l'orifice 1 seconde plus tard, 3 secondes après le coup de cloche.

(Bacc. lettres-math., Montpellier, nov

Soient t le temps que met le son à parcourir le p de l'ascension du projectile ; nous avons, e étant la du puits, 340^m la vitesse du son et v_0 la vitesse init jectile,

$$e = 340t, \qquad e = v_0 t' - \frac{1}{2} g t'^2.$$

Mais en vertu de l'énoncé il vient,

$$2t = 2, \qquad t + t' = 3.$$

Par suite, nous obtenons

$$t = 1, \qquad t' = 2,$$

d'où $$e = 340^m,$$

et $$340 = 2v_0 - 2g,$$

qui nous donne pour la vitesse initiale,

$$v_0 = 179^m,81.$$

181. *Un corps en tombant a décrit* $\frac{1}{n}^{\text{ième}}$ *de la hau de la chute pendant la dernière seconde. Calculer la chute et le temps employé à descendre.*

La durée et la hauteur de la chute étant t et h, L

$$(1) \qquad h = \frac{1}{2} g t^2.$$

D'autre part, l'espace parcouru pendant la dernièr s'écrit

$$\frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g (t-1)^2 = \frac{g(2t-1)}{2},$$

et il viendra, en introduisant l'hypothèse,

$$\frac{h}{n} = \frac{1}{2n} g t^2 = \frac{g}{2} (2t - 1),$$

d'où nous tirons

$$(2) \qquad f(t) = t^2 - 2nt + n = 0.$$

t doit être réel et supérieur à 1 ; or nous avons

$$f(1) = 1 - n < 0,$$

par conséquent 1 sépare les racines de (2) et la racine supérieure à 1 conviendra seule.

Nous aurons donc pour la durée de la chute

$$t = n + \sqrt{n(n-1)}.$$

L'équation (1) nous donnera la hauteur de chute et il viendra

$$h = \frac{gn}{2}\left[2n - 1 + 2\sqrt{n(n-1)}\right].$$

182. *Figurer une droite verticale. Du point* O *de cette ligne, on lance un mobile pesant de bas en haut, suivant la verticale, avec la vitesse initiale* v_0 ; *on lance suivant la même verticale, et à partir du même point* O, *un second point matériel pesant,* θ *secondes après le départ du premier, avec la vitesse initiale* v. *On demande de déterminer :* 1° *l'instant de la rencontre ;* 2° *la distance du point de rencontre au point* O ; 3° *les vitesses* v, v' *des mobiles à ce moment, et* 4° *de discuter ces résultats.*

(*Bacc. ès sciences, Chambéry.*)

Les formules du mouvement des deux mobiles s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \\ (2) & v = v_0 - gt, \\ (3) & v^2 - v_0^2 = -2ge; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} (1)' & e' = v'_0 t' - \frac{1}{2} g t'^2, \\ (2)' & v' = v'_0 - gt', \\ (3)' & v'^2 - v'^2_0 = -2ge', \end{array}\right.$$

et nous avons $t = t' + \theta$. Les deux mobiles se rencontreront quand on aura $e = e'$, ou bien

$$v_0(t' + \theta) - \frac{1}{2} g(t' + \theta)^2 = v'_0 t' - \frac{1}{2} g t'^2,$$

d'où nous tirons

$$t' = \frac{\theta(g\theta - 2v_0)}{2(v_0 - v'_0 - g\theta)}.$$

On doit avoir $t' > 0$, c'est-à-dire

$$(g\theta - 2v_0)(v_0 - v'_0 - g\theta) > 0,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{v_0 - v'_0}{g} < \theta < \frac{2v_0}{g}.$$

Remplaçons dans (1)′ t' par sa valeur, nous auro distance du point de rencontre au point O,

$$e' = \frac{\theta(g\theta - 2v_0)(g\theta + 2v'_0)(2v_0 - 2v'_0 - g\theta)}{4(v_0 - v'_0 - g\theta)^2}.$$

La rencontre aura lieu au-dessus ou au-dessous d suivant que e' sera positif ou négatif; or, comme $g\theta$ - en vertu de (4) nous aurons

1° $2(v_0 - v'_0) - g\theta < 0$, rencontre au-dessus
2° $2(v_0 - v'_0) - g\theta = 0$, — au point
3° $2(v_0 - v'_0) - g\theta > 0$, — au-dessou

Pour avoir les vitesses v et v' des mobiles au mon rencontre, il suffira de remplacer t et t' par leur dans (2) et (2)′; on peut encore diriger le calcul comm

Retranchons (3) et (3)′, comme $e = e'$ il viendra

$$(5) \qquad v^2 - v'^2 = v_0^2 - v_0'^2.$$

Retranchons (2) et (2)′, nous aurons

$$(6) \qquad v - v' = v_0 - v'_0 - g\theta.$$

Divisons (5) par (6), nous obtiendrons

$$(7) \qquad v + v' = \frac{v_0^2 - v_0'^2}{v_0 - v'_0 - g\theta}.$$

Finalement, (6) et (7) nous donnent

$$v = \frac{1}{2}\,\frac{(v_0 - v'_0 - g\theta)^2 + v_0^2 - v_0'^2}{v_0 - v'_0 - g\theta}, \quad \text{et} \quad v' = \frac{1}{2}\,\frac{v_0^2 - v_0'^2 - (v_0 -}{v_0 - v'_0 -}$$

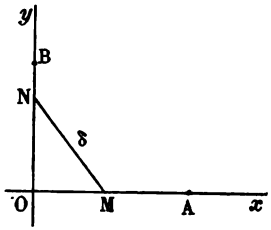
183. *Deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy *se coupe point* O. *Au même instant, deux mobiles, se dirigean point* O *d'un mouvement uniformément accéléré, part vitesse initiale des points* A *et* B *respectivement situés droites. Les accélérations sont* a *et* b. *On demande da*

bien de temps la distance des mobiles sera minimum, la valeur de cette distance minima et les positions correspondantes des mobiles.

APPLICATION : $OA = 20^m$, $OB = 10^m$, $a = b = 1^m$.

(*Brevet de Cluny, 1871.*)

Posons $OA = \alpha$, $OB = \beta$ et représentons par x et y les distances des mobiles à l'origine O; nous aurons



$$x = \alpha - \frac{1}{2}at^2, \qquad y = \beta - \frac{1}{2}bt^2.$$

La distance des mobiles étant δ, il viendra

$$\delta^2 = x^2 + y^2,$$

ou

$$\delta^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)t^4 - (a\alpha + b\beta)t^2 + (\alpha^2 + \beta^2),$$

ou bien encore

$$\delta^2 = \frac{1}{4(a^2 + b^2)}[(a^2 + b^2)t^2 - 2(a\alpha + b\beta)]^2 + \frac{(a\beta - b\alpha)^2}{a^2 + b^2}.$$

t croissant depuis zéro, le crochet, et par suite δ^2, diminue et δ^2 acquiert la plus petite valeur quand on a

$$t = \sqrt{\frac{2(a\alpha + b\beta)}{a^2 + b^2}};$$

alors la distance des deux mobiles se réduit à

$$\delta = \left| \frac{a\beta - b\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|,$$

et, à cette époque, les espaces sont

$$x = \frac{b(b\alpha - a\beta)}{a^2 + b^2},$$

$$y = \frac{a(a\beta - b\alpha)}{a^2 + b^2}.$$

Application. — $\alpha = 20^m$, $\beta = 10^m$, $a = b = 1^m$.

Après substitution dans les formules précédentes, nous obtenons

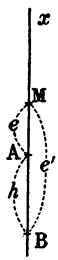
$$t = 5^{\text{sec}},47, \qquad \delta = 7^{\text{m}},07,$$
$$x = 5^{\text{m}}, \qquad y = -5^{\text{m}}.$$

184. 1° *On lance verticalement un corps pesant,* C, *dans le vide, de bas en haut. Soient* A *le point de départ,* M *la position au temps* t. *Expressions de la distance* AM *et de la vitesse en* M ? *Durée du mouvement ascendant? Maximum de la hauteur* AM *à laquelle le corps s'élève?*

2° v_0 *étant la vitesse initiale, on imagine qu'un corps* C′, *situé sur la verticale de* A, *en* B, *à la distance* h *au-dessous, se dirige d'un mouvement uniforme vers* A *avec une vitesse* a, *l'instant du départ des deux corps étant le même. A quel moment et à quelle distance de* B *rencontrera-t-il le premier? Discuter.*

(*Bacc. spécial, Besançon, 1889.*)

1° Les formules du mouvement du corps C s'écrivent



$$\begin{cases} (1) & e = v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2, \\ (2) & v = v_0 - gt, \\ (3) & v^2 - v_0^2 = -2ge, \end{cases}$$

e et v étant comptés positivement suivant Ax.

Le mobile s'arrêtera quand on aura $v = 0$, et (2) nous donne pour la durée du mouvement ascendant,

$$\mathrm{T} = \frac{v_0}{g}.$$

En faisant $v = 0$ dans (3), nous obtiendrons pour hauteur de culmination

$$\mathrm{E} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

2° Soit e' l'espace parcouru par C′ au bout du temps t; nous avons

$$e' = at.$$

Or, quand les mobiles C et C′ se rencontreront (soit au-dessus

de A, soit entre B et A), nous aurons

$$e' - e = h,$$

car on a toujours

$$\overline{BM} - \overline{AM} = \overline{BA} \ ;$$

il viendra donc

$$f(t) = gt^2 + 2(a - v_0)t - 2h = 0.$$

t devant être positif, et l'équation précédente ayant ses racines de signe contraire, il y a toujours une rencontre et une seule.

L'époque de la rencontre est donc

$$t = \frac{v_0 - a + \sqrt{(v_0 - a)^2 + 2gh}}{g};$$

et, si M est le point de jonction, nous aurons

$$BM = \frac{a}{g}\left[v_0 - a + \sqrt{(v_0 - a)^2 + 2gh}\right].$$

Discutons. C′ rencontrera C montant quand on aura

$$f\left(\frac{v_0}{g}\right) > 0.$$

Si C est à sa culmination, il faudra $f\left(\frac{v_0}{g}\right) = 0$.

C′ rencontrera C descendant : 1° au-dessus de A quand $f\left(\frac{v_0}{g}\right) < 0$, $f\left(\frac{2v_0}{g}\right) > 0$; 2° en A, quand $f\left(\frac{2v_0}{g}\right) = 0$; 3° entre A et B, quand $f\left(\frac{2v_0}{g}\right) < 0$.

Si nous réunissons et développons ces conditions, nous obtenons le tableau suivant :

Rencontre pendant asc. de C,	$v_0(2a - v_0) - 2gh > 0$,
— à la culminat. de C,	$v_0(2a - v_0) - 2gh = 0$;

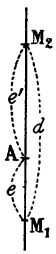
Rencontre pendant la chute de C,	au-dessus de A,	$\frac{gh}{2v_0} < a <$
	en A,	$a =$
	entre A et B,	$a <$

185. *Deux mobiles* M_1 *et* M_2, *situés sur la même ve lancés en même temps, suivant cette verticale, le pre vitesse* v_1 *de bas en haut, le second avec la vitesse* v_2 *bas. On suppose* $M_1M_2 = d$. *On demande le lieu de la rencontre. Discussion.*

APPLICATION : $d = 100^m$, $v_1 = 20^m$, $v_2 = 30^m$.

(*Dipl. ens. special, Bordeaux,*

Pour que la rencontre puisse se produire, il faut é que M_1 soit situé plus bas que M_2.



Le mouvement d'ascension et de chute qui part de M_1 est régi par l'unique formul

$$(1) \qquad e = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

e étant compté positivement dans le sens M_1

Pareillement, nous avons pour le mou second mobile,

$$(2) \qquad e' = v_2 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

e' étant compté positivement suivant M_2M_1.

Ceci posé, quand les mobiles se rencontreront, ce avoir lieu entre M_1 et M_2 ou au-dessous de M_1, on

ces deux cas $\qquad e + e' = d,$

ou bien $\qquad (v_1 + v_2)t = d,$

d'où $\qquad t = \frac{d}{v_1 + v_2}.$

t étant positif, la rencontre se produira toujours et

fois. D'autre part, si A est le lieu où les mobiles se joignent, nous aurons, en substituant dans (1),

$$M_1A = \frac{2v_1(v_1 + v_2)d - gd^2}{2(v_1 + v_2)^2}.$$

Appelons M_1 et M_2 les mobiles qui partent de ces points et discutons ces résultats. La rencontre peut avoir lieu : 1° pendant l'ascension de M_1 ; 2° à la culmination de M_1 ; 3° pendant la chute de M_1, entre M_1 et M_2 ; 4° au-dessous de M_1.

Pour distinguer ces différents cas, il suffit de rappeler que la durée d'ascension du mobile M_1 est $\frac{v_1}{g}$ et qu'il revient au point de départ au bout du temps $\frac{2v_1}{g}$; on obtient alors le résumé suivant :

Rencontre pendant ascension de M_1,		$\frac{d}{v_1 + v_2} < \frac{v_1}{g}$.
Rencontre à la culmination de M_1,		$\frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{v_1}{g}$.
Rencontre pendant la chute de M_1	au-dessus de M_1,	$\frac{v_1}{g} < \frac{d}{v_1 + v_2} < \frac{2v_1}{g}$;
	en M_1,	$\frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{2v_1}{g}$;
	au-dessous de M_1,	$\frac{d}{v_1 + v_2} > \frac{2v_1}{g}$.

Application. — $d = 100^m$, $v_1 = 20^m$, $v_2 = 30^m$.

Nous avons $t = \frac{100}{50} = 2^{sec}$.

Or, $\frac{v_1}{g} = \frac{20}{g}$; par suite la rencontre se produit pendant l'ascension de M_1. Le lieu de la rencontre est défini par

$$M_1A = 40 - 2g = 20^m,38.$$

186. *Un mobile décrit une droite suivant la loi*

$$e = at^3 + bt + c.$$

Sachant que l'espace initial est 1^m, *que la vitesse au temps* $t = 1$ *est* 14^m, *et qu'au temps* $t = 2$ *l'accélération est de* 48^m, *calculer les constantes* a, b, c.

Nous avons

(1) $$e = at^3 + bt + c.$$

Si nous prenons la dérivée par rapport à t, il viendra

(2) $$v = 3at^2 + b.$$

Enfin, comme le mouvement est rectiligne, l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps et il vient

(3) $$\gamma = 6at.$$

Introduisons les données de l'énoncé, les formules (1), (2) et (3) nous donneront

$$c = 1, \qquad 3a + b = 14, \qquad 12a = 48,$$

d'où nous tirons $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$.

La loi de l'espace s'écrit donc

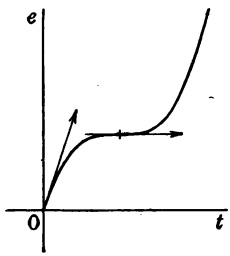
$$e = 4t^3 + 2t + 1.$$

187. *Étudier le mouvement rectiligne dans lequel la loi de l'espace est représentée par la relation* $e = (t - 1)^3 + 1$, *depuis l'origine des temps jusqu'au temps* $t = 3$.

Nous avons pour la vitesse et l'accélération au temps t

$$v = 3(t - 1)^2, \qquad \gamma = 6(t - 1);$$

nous pourrons sans difficulté dresser le tableau suivant :



t	γ	v	e
0	—6	3	0
cr.	cr.	décr.	cr.
1	0	0	1
cr.	cr.	cr.	cr.
2	6	3	2
3	12	12	9

Nous voyons ainsi que le mobile est à l'origine des espaces

à l'instant initial et qu'il s'éloigne constamment de sa position première. Sa vitesse décroît depuis 3 jusqu'à zéro, puis croît ensuite sans limite ; par suite, le mouvement du mobile est retardé depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$; à cette époque il s'arrête, mais pour repartir immédiatement d'un mouvement accéléré.

Ces diverses circonstances se lisent clairement sur le diagramme ci-dessus et il est à remarquer que la tangente à cette courbe au point $(t = 1, \quad e = 1)$ est horizontale.

Quant au diagramme de la loi de la vitesse, c'est une parabole que l'on construira sans difficulté.

La courbe figurative des variations de l'accélération est une droite dont le coefficient angulaire est 6. L'accélération varie proportionnellement au temps.

188. *Tout mouvement dans lequel la vitesse v est liée à l'espace e par*

$$v^2 = ae + b$$

est uniformément varié.

En effet, soient aux époques très rapprochées t, $t + \Delta t$,

e, $e + \Delta e$ les espaces,

et v, $v + \Delta v$ les vitesses ;

nous aurons par hypothèse

$$v^2 = ae + b, \qquad (v + \Delta v)^2 = a(e + \Delta e) + b.$$

Retranchons, il viendra

$$2v.\Delta v + \overline{\Delta v}^2 = a.\Delta e.$$

Divisons par Δt, passons à la limite et rappelons que $\lim \frac{\Delta e}{\Delta t} = v$, nous obtiendrons $v' = \frac{a}{2}$,

c'est-à-dire que l'on a

$$v = \frac{a}{2} t + c,$$

et le mouvement est uniformément varié.

189. *Un cylindre creux, dont les bases sont en pa autour de son axe d'un mouvement uniforme de v laire a ; une balle lancée parallèlement à l'axe fait i chaque base ; les rayons qui passent par ces trous font Quelle est la vitesse de la balle, l étant la longueur d*

Soit v la vitesse de la balle et t le temps qu'ell verser le cylindre ; nous aurons $l = vt$,

et aussi $\alpha = at$;

de ces relations nous tirons

$$\frac{v}{a} = \frac{l}{\alpha},$$

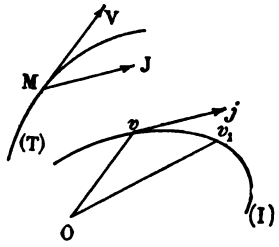
et

$$v = \frac{a}{\alpha} l.$$

C'est le principe du procédé EYTELWEIN pour mesur des projectiles.

190. *Pour que l'accélération d'un mobile soit c normale à la trajectoire, il faut et il suffit que le mo mobile soit uniforme.*

Soient (T) la trajectoire du mobile, MV, MJ sa vit accélération pour la positi



Par un point O quel l'espace, menons les seg Ov_1, ... équipollents au vitesses ; le lieu des extré ces segments est la courb *catrice des vitesses.*

Le segment $(vj) =$ l

représente à la fois la vitesse du point v et, en g direction, l'accélération MJ (ceci résulte de la définit de l'accélération). Les angles VMJ et Ovj sont donc s taires : ceci posé, si le mouvement du point M est Ov est constant, la courbe (I) est sphérique et j

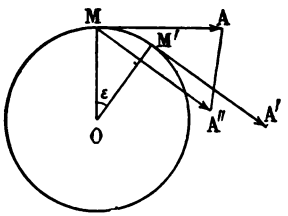
donc, en vertu de la remarque précédente, MJ est normale à MV, c'est-à-dire à la trajectoire.

Réciproquement, supposons $\widehat{VMJ} = 90°$; on aura pareillement $\widehat{Ovj} = 90°$.

La courbe (I) ayant toutes ses normales Ov concourantes en O est située sur une sphère de centre O, et la vitesse Ov demeure constante pendant la durée du mouvement.

191. *Un point décrit une circonférence d'un mouvement donné d'ailleurs quelconque; calculer les composantes* normale *et* tangentielle *de l'accélération.*

Soient aux instants t et $t + \Delta t$ les positions M et M′ du mobile, $MA = V$, $M'A' = V + \Delta V$ les vitesses, et $\widehat{M'OM} = \varepsilon$.



L'accélération moyenne est le quotient de la différence géométrique des vitesses par Δt, et l'accélération au temps t est la limite de ce rapport quand Δt tend vers zéro.

Appelons (J) cette accélération et J_N, J_T ses composantes normale et tangentielle; nous avons, en menant MA″ équipollent à M′A′,

$$(J) = \lim \frac{(MA'') - (MA)}{\Delta t}.$$

Projetons sur la normale MO, il viendra

$$J_N = \lim \frac{MA'' \sin \varepsilon}{\Delta t} = \lim \frac{(V + \Delta V)\varepsilon}{\Delta t} \lim \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Or,
$$V = \lim \frac{R.\varepsilon}{\Delta t},$$
donc
$$(1) \qquad \lim \frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{V}{R};$$
substituons ; nous obtiendrons, en remarquant que ΔV tend vers zéro avec Δt,
$$J_N = \frac{V^2}{R}.$$

Projetons maintenant sur la tangente MA ; il vie

$$J_T = \lim \frac{(V + \Delta V)\cos\varepsilon - V}{\Delta t}$$

$$= \lim \frac{\Delta V}{\Delta t}\cos\varepsilon - \lim \frac{2V\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\Delta t}.$$

Or $$\lim \frac{\Delta V}{\Delta t}\cos\varepsilon = V'_t,$$

et

$$\lim 2V\frac{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\Delta t} = \lim \sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\lim\frac{V\varepsilon}{\Delta t}$$

$$= \lim \sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\lim\frac{V^2}{R} = 0$$

donc $$J_T = V'_t.$$

En résumé, les composantes normale et tangentie lération sont

$$J_N = \frac{V^2}{R}, \qquad J_T = V'_t.$$

Si l'on appelle ω la vitesse angulaire du mob donner à ces expressions une autre forme; on $V = \omega R$, et il vient

$$J_N = \omega^2 R, \qquad J_T = R\omega'_t.$$

Quant à l'accélération J elle-même, elle est donnée

$$J^2 = J_N^2 + J_T^2,$$

d'où nous tirons

$$J = R\sqrt{\omega^4 + \omega'^2_t}.$$

Remarque. — Quand le mouvement du point e on a $\omega'_t = 0$, et l'accélération se réduit à sa com male $\omega^2 R$, et réciproquement, quand l'accélération le mouvement circulaire est uniforme.

192. *Un point décrit une circonférence de rayo vitesse* $v = \frac{a}{5-t}$. *Calculer les composantes de l' suivant la tangente et la normale à la trajectoire.*

Nous avons vu (191) que l'on avait pour les composantes tangentielle et normale de l'accélération, dans un mouvement circulaire

$$J_T = v'_t, \qquad J_N = \frac{v^2}{R}.$$

Or, d'après l'hypothèse,

$$v = \frac{a}{5-t},$$

et, par suite,

$$v'_t = \frac{a}{(5-t)^2},$$

de sorte qu'il viendra

$$J_T = \frac{a}{(5-t)^2}, \qquad J_N = \frac{a}{(5-t)^2}.$$

L'accélération J s'obtiendra en appliquant la formule

$$J^2 = J_T^2 + J_N^2,$$

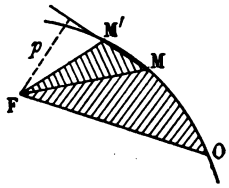
et nous aurons

$$J = \frac{a\sqrt{2}}{(5-t)^2}.$$

Enfin, comme $J_T = J_N$, le segment J sera à chaque instant incliné de 45° sur la normale à la circonférence trajectoire.

193. *Un point* M *décrit une ellipse; sachant que le rayon vecteur issu d'un foyer balaye des aires proportionnelles aux temps, construire la courbe indicatrice des vitesses.*

D'une façon générale, considérons un mobile décrivant une courbe plane et l'aire balayée par un rayon vecteur FM.



Posons

$$A = \text{aire FOM}.$$

A l'époque $t + \Delta t$, le mobile sera en M', et si ΔA est l'accroissement qu'éprouve A, nous aurons

$$\Delta A = \text{aire FMM'} = \frac{1}{2}\,\text{corde MM'}.p,$$

d'où $$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{corde } MM'}{\Delta t}\,p,$$

et à la limite $$A' = \frac{1}{2}\,vp.$$

La dérivée A′ de l'aire par rapport au temps porte le nom de *vitesse aréolaire*.

Or, revenons à notre problème ; par hypothèse

$$A = \frac{1}{2}\,C^2 t + C'^2,$$

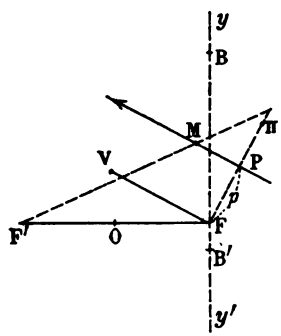
C^2 et C'^2 étant deux constantes ; il viendra donc

$$A' = \frac{1}{2}\,vp = \frac{1}{2}\,C^2 \quad \text{(la vitesse aréolaire est constante)}$$

d'où :

(1) $$vp = C^2.$$

Prenons comme origine le foyer F et portons parallèlement à la tangente à l'ellipse en M le segment vitesse $FV = v$; nous obtiendrons un point V de l'indicatrice des vitesses.



Soit d'autre part, sur la perpendiculaire à la tangente, $F\Pi = v$.

En vertu de (1) le lieu de Π est une courbe inverse du cercle principal lieu de P, la puissance d'inversion étant C^2 ; ce sera donc une circonférence (Γ) ; d'ailleurs, comme on fait coïncider tout point Π avec tout point V correspondant par une rotation de 90° autour de F, le lieu de V sera la circonférence que l'on obtiendra en faisant tourner (Γ) de 90° autour de F.

Cette circonférence est symétrique par rapport à yy' et comme on le voit aisément, elle coupe cet axe en B et B′ définis par

$$FB = \frac{C^2}{a-c}, \qquad FB' = \frac{C^2}{a+c}.$$

EXERCICES

158. — Deux points A, A′ décrivent d'un mouvement uniforme deux droites D, D′ parallèles. Quel est le mouvement du milieu O de AA′ ?

159. — Deux droites se coupent à angle droit en un point O. Deux courriers, partis simultanément de ce point, prennent ces deux routes avec des vitesses v, v' constantes. Au bout du temps t, ils reviennent sur leurs pas en échangeant leurs vitesses. On demande à quelle époque leur distance est d. Trouver le minimum de d.

(*Conc. acad. enseig. spécial, Caen, 1876.*)

160. — Deux mobiles se meuvent uniformément à partir de O sur Ox, avec des vitesses v, v'. Un point P est donné sur la perpendiculaire Oy à Ox. Au bout de combien de temps verra-t-on du point P la distance des deux mobiles sous l'angle maximum ?

(*Saint-Cyr, 1878.*)

161. — Désignons par a et b les distances AO, BO de deux points fixes à un troisième point fixe O, et considérons deux mobiles assujettis à se déplacer sur OA et OB de façon que l'on ait

$$OM = a + vt, \qquad OM' = b + v't.$$

Prouver que la circonférence circonscrite au triangle OMM′ passe par un point fixe.

(*Journal de Vuibert, 1890-91.*)

162. — On donne sur une droite deux points A et B ; sachant qu'un point M décrit cette droite d'un mouvement uniforme, trouver le mouvement du conjugué harmonique de M par rapport au segment AB.

163. — Pendant combien de temps un corps abandonné à lui-même doit-il tomber pour parcourir 500^m pendant les deux dernières secondes ?

(*Bacc., Dijon, 1874.*)

164. — On demande avec quelle vitesse devrait être lancé un boulet de canon pour qu'il pût s'élever à une hauteur de 400^m. Quel serait l'intervalle de temps entre le départ et le retour ?

(*Conc. acad., Clermont, 1874.*)

165. — On lance un projectile verticalement de bas en haut avec une vitesse de 25^m par seconde. On demande au bout de combien de temps il se trouvera à 12^m au-dessus de son point de départ.

(*Diplôme ens. spécial, Angers, 1879.*)

166. — On lance une pierre du haut d'un pont, avec une vitesse de 1^m par seconde ; au bout de combien de temps atteindra-t-elle le niveau de l'eau, sachant que si on l'eût laissée tomber librement, elle eût frappé l'eau au bout de $2^{sec},5$?

167. — On suppose qu'un corps tombe dans le vide, sans vitesse initiale et d'une hauteur h ; on demande de partager cette hauteur en trois parties telles que chacune d'elles soit parcourue dans le même temps.

168. — Deux mobiles pesants sont lancés de bas en haut, au même instant, l'un avec une vitesse a, l'autre avec une vitesse b. On demande après combien de temps la somme des carrés de leurs vitesses aura sa valeur minima.

(*Bacc., Paris, 1877.*)

169. — On a laissé tomber deux corps dans le vide et du même point ; 10 secondes après la chute du premier ces deux corps sont éloignés de $229^m,10$. A quel moment a-t-on laissé tomber le second ?

(*Brev. ens. spécial, Bordeaux, 1879.*)

170. — Un observateur placé sur le haut d'une tour laisse tomber en dehors de la tour une pierre qui vient frapper le sol. On demande la hauteur de la tour, sachant qu'il entend la chute après 8 secondes et que le son parcourt 340^m à la seconde.

171. — Un corps élastique et pesant, de dimensions insensibles, est abandonné à lui-même dans le vide, sans impulsion initiale ; il vient frapper contre un plan horizontal qui le réfléchit verticalement, et on admet qu'en le quittant sa vitesse n'est plus que les $\frac{2}{3}$ de celle qu'il avait en l'atteignant. On demande de quelle hauteur au-dessus du plan il faut laisser tomber ce corps, pour qu'il s'écoule 10 secondes entre le commencement de sa chute et l'instant où, après sa réflexion, il atteint le point le plus élevé de sa course ascendante.

(*Bacc., Dijon, 1875.*)

172. — Dans un mouvement rectiligne on a

$$v = 7 - 2t.$$

On demande l'accélération moyenne et l'espace parcouru depuis $t = 2$ jusqu'à $t = 3{,}5$.

(*Bacc., Lille, 1881.*)

173. — Dans un mouvement rectiligne on a

$$e = t^4 - t^2.$$

1° Calculer la vitesse moyenne et l'accélération moyenne depuis $t = 2^{sec}$ jusqu'à $t = 3^{sec},5$.

2° Calculer la vitesse et l'accélération à la deuxième seconde.

174. — Étudier le mouvement rectiligne

$$e = t^3 - 3.$$

Vitesse. Accélération. Diagramme de la loi de l'espace.

175. — Dans un mouvement rectiligne on a

$$e = \sqrt{a^2 - t^2}.$$

Étudier ce mouvement. Construire le diagramme de la loi de l'espace. A quelle époque la vitesse a-t-elle une valeur donnée b ?

176. — Un segment rectiligne AB de longueur constante a glisse par ses extrémités sur deux axes rectangulaires Ox, Oy. Le mouvement de A est défini par $OA = \frac{2at}{1 + t^2}$, quelle est la loi du mouvement de B ? A quelle époque les vitesses de ces deux points sont-elles égales ?

177. — Un point qui se meut sur une droite a pour vitesse

$$v = at^2 + bt + c,$$

et passe à l'origine des espaces à l'instant initial. Trouver la loi de l'espace.

178. — Deux mobiles partent en même temps de deux points A et B et marchent sur la droite AB, dans le sens AB. Le premier mobile parcourt a mètres pendant la 1re seconde,

$(a + \alpha)$ mèt. » » 2e » ,

. . . . . .

$[a + (n - 1)\alpha]$ mèt. » » n^e » .

Le deuxième mobile parcourt

b mètres pendant la 1re seconde,
$(b+\beta)$ mèt. » » 2e » ,
. . . . . .
$[b+(n-1)\beta]$ mèt. » » n^e » .

On demande au bout de combien de temps les deux mobiles se rencontreront sachant que $AB = p$. On discutera la solution trouvée. Le problème est-il toujours possible ? Quel sens peut-on attribuer aux solutions négatives ? A quelles relations doivent satisfaire a, α, b, β et p pour que le problème n'admette jamais qu'une solution ?

Application : $a = 1^m$, $\alpha = 2^m$, $b = 3^m$, $\beta = 1^m$, $p = 75^m$.

(*Bacc. ès sciences, Lyon, 1891.*)

179. — On considère un point en mouvement sur une droite et l'on remarque que l'espace parcouru par ce point s'exprime, en fonction du temps employé à le parcourir, par la formule

$$e = t^3 - 12t^2 + 48t.$$

On demande de trouver la vitesse moyenne de ce mobile entre la première et la deuxième seconde ; on cherchera de même la vitesse moyenne entre la troisième et la cinquième seconde, puis entre la première et la septième seconde.

(*Bacc. ès sciences, Marseille.*)

180. — Deux pierres placées sur la même verticale à 50^m l'une de l'autre sont abandonnées à l'action de la pesanteur, celle qui est située le plus haut 3 secondes avant celle qui est située le plus bas. Au bout de combien de temps la première aura-t-elle atteint la seconde ? On négligera la résistance de l'air.

(*Bacc. Paris, 1892.*)

181. — Calculer la vitesse et l'accélération dans un mouvement rectiligne varié, sachant que l'on a $e = a \sin^2 t$, a étant une constante.

(*Bacc. ès sciences, Nancy, 1889.*)

182. — Un train de vitesse v part après un autre de vitesse v'. Le retard est calculé de façon qu'ils arrivent en même temps à destination. Le premier ralentit sa vitesse de $\frac{1}{n}$ de sa valeur quand il a fait une fraction f de sa course, et il y a rencontre des trains à une distance d du terme du voyage. Trouver la longueur totale du trajet.

(*Bacc. ès sciences, Grenoble, 1889.*)

183. — Un cercle O de rayon x et un point P à la distance y de O sont fixes dans un plan. Une droite MN se meut dans le plan autour de P avec une vitesse constante ω et touche successivement le cercle aux points A, a, a', A'. On donne la distance d de MN au point P, ω, et les intervalles de temps $2t$, $2t'$ qui séparent respectivement les contacts extérieurs A, A' et les contacts intérieurs a, a'. On demande de calculer x et y, et de déterminer les points de contact sur la droite, comme sur le cercle.

(*Bacc. ès sciences, Besançon, 1886.*)

184. — Soit une verticale XX'; on lance au temps t, de X', de haut en bas, un mobile pesant avec la vitesse v_0; au temps t' on en lance un second de X avec la même vitesse de bas en haut. Au bout de combien de temps se rencontreront-ils? Au bout de combien de temps seront-ils à la distance d?

(*Saint-Cyr, 1889.*)

185. — Calculer la vitesse angulaire de rotation de la terre.

186. — Un mobile partant de A, décrit la demi-circonférence AMB d'un mouvement tel que la distance rectiligne AM varie proportionnellement au temps, c'est-à-dire de manière que

$$\text{corde AM} = at.$$

Trouver la nature du mouvement de la projection P de ce point sur le diamètre AB. On suppose ensuite qu'un autre point M', partant de A en même temps que M, décrive pareillement la demi-circonférence AM'C, les points A, B, C étant en ligne droite, de manière que corde AM' $= a't$; on demande les conditions auxquelles doivent satisfaire a et a' : 1° pour que les deux points M et M' se trouvent toujours sur une même droite passant par A; 2° pour qu'ils aient toujours la même projection sur AB.

(*Bacc. ès sciences, Paris.*)

187. — Calculer la vitesse de rotation que possède un point du parallèle terrestre de Lille dans son mouvement diurne. La latitude de Lille est $\lambda = 50° 38',44''$.

(*Diplôme ens. spécial, Lille, 1880.*)

188. — Un point décrit une circonférence de rayon 1 suivant la loi $e = \sin t$. A quelle époque la grandeur de l'accélération est-elle a? Discussion.

189. — Un point décrit une circonférence de rayon R avec la vitesse angulaire $\omega = t^2$. Trouver la loi de l'espace.

190. — Un point M décrit une circonférence de di
de rayon a ; sachant que le rayon vecteur AM balaye
portionnelles aux temps, calculer la vitesse du mobil
de l'angle $MAB = 2\theta$, et étudier les variations de ce

191. — Un point M décrit une circonférence suivant

$$\sin\theta = at + b,$$

θ étant l'angle du rayon OM avec un rayon initial Ox
1° Construire la courbe indicatrice des vitesses ;
2° Démontrer que l'accélération est constamment pa

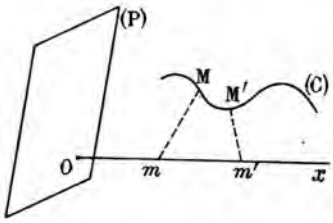
CHAPITRE II

MOUVEMENT PROJETÉ SUR UN AXE
COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DE MOUVEMENTS
MOUVEMENT RELATIF

---

194. Théorème. — *Un point étant animé d'un mouvement quelconque, si à chaque instant on projette le mobile sur un axe, les projections de la vitesse et de l'accélération du mobile sont respectivement égales à la vitesse et à l'accélération de sa projection.*

1° Soit le point M décrivant la courbe (C) et effectuons la projection sur l'axe Ox parallèlement au plan (P). Nous avons, M et M' étant les positions du mobile aux époques t, $t+\Delta t$,



$$(MM') = mm', \quad (*)$$

d'où

$$\frac{(MM')}{\Delta t} = \left(\frac{MM'}{\Delta t}\right) = \frac{mm'}{\Delta t};$$

il viendra donc, en faisant tendre Δt vers zéro,

$$(V) = v.$$

2° V et V' étant les vitesses du mobile aux instants t, $t+\Delta t$, nous avons

$$(V) = v, \qquad (V') = v',$$

d'où

$$(V') - (V) = v' - v,$$

et

$$\frac{(V') - (V)}{\Delta t} = \frac{v' - v}{\Delta t}.$$

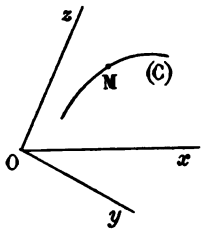
Passons à la limite, nous aurons finalement

$$(\Gamma) = \gamma,$$

Γ étant l'accélération du mobile et γ l'accélération de sa projection m.

(*) Nous représentons symboliquement *projection* de AB par (AB).

Conséquences. — Soient x, y, z les coordonn une courbe (C) et anim nous aurons



$$x = f(t), \qquad y =$$

V_x, V_y, V_z étant les p les axes et Γ_x, Γ_y, Γ_z c le théorème précédent

$$V_x = f'(t), \qquad V_y =$$

et

$$\Gamma_x = f''(t), \qquad \Gamma_y =$$

Si la trajectoire du po deux axes du plan, on a

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t);$$

puis

$$V_x = f'(t), \qquad V_y = \varphi'(t$$

et

$$\Gamma_x = f''(t), \qquad \Gamma_y = \varphi''(t)$$

195. *Courbe indicatrice des vitesses.* — Considéro pollent au segment vitesse V; nous avons (OA) = si ξ, η, ζ sont les coordonnées du point A de l vitesses, nous aurons

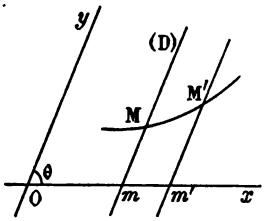
$$\xi = V_x, \qquad \eta = V_y, \qquad \zeta =$$

ou bien

$$\xi = f''(t), \qquad \eta = \varphi''(t), \qquad \zeta =$$

Telles sont les expressions des coordonnées d'u l'indicatrice des vitesses en fonction du temps.

196. Composition des mouvements rectilignes. — Co simple de *deux* m d'ailleurs quelconqu



Soient deux axes qu'une droite (D) s ment quelconque, m à Oy et en s'appuy Ox et un point M sur la droite (D).

Nous nous propos ments du mouveme dire de rechercher la trajectoire que décrit le point la façon dont il décrit cette trajectoire.

Le mouvement de la droite (D) est le même que mouvement étant connu, nous avons

$$Om = f(t).$$

D'autre part, le mouvement de M étant aussi connu sur la droite D, nous aurons

$$mM = \varphi(t).$$

Par conséquent, x et y étant les coordonnées de M à l'instant t, il viendra

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

En éliminant t entre ces deux équations, on obtiendra l'équation de la *trajectoire*

$$F(x, y) = 0.$$

Vitesse. — Si V_x et V_y sont les vitesses des mouvements suivant Ox, Oy et V la vitesse résultante, nous avons évidemment

$$(V) = (V_x) + (V_y).$$

La vitesse résultante est donc la résultante géométrique des vitesses des mouvements composants ; de sorte qu'elle est ainsi parfaitement déterminée en grandeur et direction.

Accélération. — Soit (Γ) l'accélération résultante ; nous avons

$$(\Gamma) = \lim \frac{(V') - (V)}{\Delta t},$$

mais $\qquad (V') = (V'_x) + (V'_y), \qquad (V) = (V_x) + (V_y);$

il viendra en substituant,

$$(\Gamma) = \lim \left[\frac{(V'_x) - (V_x)}{\Delta t} + \frac{(V'_y) - (V_y)}{\Delta t}\right],$$

ou bien

$$(\Gamma) = (\Gamma_x) + (\Gamma_y).$$

Par conséquent, ***l'accélération du mouvement résultant est la résultante géométrique des accélérations des mouvements composants.***

Elle est donc bien déterminée.

Dans le cas de ***trois*** mouvements on raisonnera pareillement et on verra que la ***vitesse et l'accélération résultantes sont respectivement les résultantes géométriques des vitesses et des accélérations des mouvements composants.***

197. Composition de deux mouvements quelconques. — Soit un système (Σ) fixe, un système (S) mobile et un point M mobile dans le système (S). Nous nous proposons d'étudier le mouvement ***absolu*** du point M, c'est-à-dire le mouvement de ce point par rapport à un observateur invariablement lié au système (Σ), connaissant son mouvement ***d'entraînement*** ou mouvement de (S) par rapport à (Σ) et son mouvement ***relatif***, c'est-à-dire le mouvement de ce point M dans le système (S).

Soit M la position du point à l'instant t, et cherchons sa position M' à l'instant $t + \Delta t$.

Si (S) était immobile M viendrait en M_1 et on aurait

$$\lim \left(\frac{MM_1}{\Delta t}\right) = V_r;$$

mais (S) étant mobile, le point vient, emporté par (S),

$$\lim \left(\frac{M_1M'}{\Delta t}\right) = (V_e).$$

Or, si nous joignons MM', nous avons

$$(MM') = (MM_1) + (M_1M'),$$

d'où, en divisant par Δt et passant à la limite,

$$(1) \qquad (V_a) = (V_r) + (V_e).$$

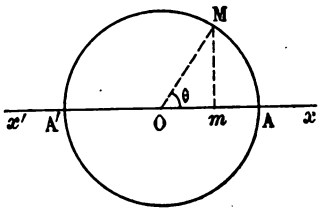
La vitesse absolue est donc la somme géométrique nement et de la vitesse relative.

Quant à l'accélération absolue elle n'est pas, en géné trique des accélérations des mouvements composants,

198. Méthode de Roberval pour le tracé des tang courbe (C) peut être considérée comme trajectoire ré tion de deux mouvements, la composition des vitesse ments donne la vitesse du mouvement suivant la courl la tangente à cette courbe. Lorsque les deux mouvem mieux, quand les vitesses composantes se construisen utiliser cette remarque pour construire la tangente à

199. *Un mobile décrit une circonférence d'r forme. Étudier le mouvement de la projection diamètre donné.*

Soit ω la vitesse angulaire du mobile M mouvement d sur le diamètr en choisissant l'origine des te



arc AM =

d'où θ =

Pour le mouv jection m, adoptons A comme origine des

$$\overline{Am} = R - R\cos\theta,$$

ou bien, en posant $Am = e$,

$$(1) \qquad e = R - R\cos\omega t.$$

Telle est la loi des espaces pour le mouveme mule nous montre que le mouvement est oscil

oscille d'une extrémité à l'autre du diamètre AA'. Ces oscillations sont isochrones ; effectivement, le temps que met m à parcourir une fois le diamètre AA' est égal à celui qu'emploie M à parcourir la demi-circonférence AMA'.

En appelant T la durée d'une oscillation simple, nous avons

$$T = \frac{\pi}{\omega}.$$

La vitesse de m peut s'obtenir, soit en projetant sur Ox la vitesse de M, soit en calculant e'_t ; nous obtenons pour son expression

$$v = R\omega \sin \omega t.$$

Calculons maintenant l'accélération ; nous avons

$$\gamma = e''_{t^2} = v'_t,$$

ou bien

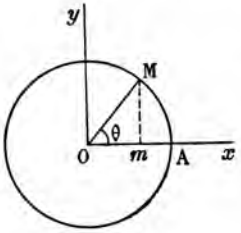
$$(2) \qquad \gamma = R\omega^2 \cos \omega t.$$

Si nous éliminons le temps entre (1) et (2) nous obtenons la relation remarquable

$$\gamma = \omega^2(R - e) = \omega^2 . \overline{mO}.$$

200. *Un point* M *décrit une circonférence ; sachant que sa projection m sur un diamètre décrit ce segment rectiligne d'un mouvement uniforme, étudier le mouvement du mobile* M.

Repérons le point M sur la circonférence par l'angle $MOx = \theta$.



Nous avons

$$\overline{Om} = R \cos \theta ;$$

mais le mouvement de m sur Ox étant uniforme, nous avons aussi

$$\overline{Am} = v_0 t,$$

de sorte qu'il vient

$$R - R \cos \theta = v_0 t,$$

d'où

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{v_0 t}{R}\right).$$

En posant arc AM $= e$, comme on a $e = R\theta$, espaces pour le mouvement du point M sur la cir s'écrira

$$e = R \text{ arc cos} \left(1 - \frac{v_0}{R} t\right).$$

Remarque. — On obtiendra la vitesse en calculant de e; pour l'accélération, que l'on pourra déterminer des formules du n° 191, nous remarquerons qu'elle e diculaire à Ox; effectivement, sa projection sur Ox e mouvement de m étant uniforme.

201. *Un point qui décrit la parabole* $y^2 - 2px =$ *au sommet à l'instant initial et avec la vitesse* a. *Sa chaque instant son accélération est parallèle à l'axe* O: *la vitesse et l'accélération de ce mobile.*

Le mouvement projeté sur Oy est uniforme, car la de l'accélération du mobile sur cet axe est nulle; nou donc écrire

$$y = at,$$

a étant la vitesse initiale du mobile.
D'autre part, l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

nous donne

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

ou bien

$$x = \frac{a^2}{2p} t^2.$$

Ceci posé, la vitesse V du mobile se déduira de la f

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2;$$

mais $$V_x = \frac{a^2}{p} t, \qquad V_y = a,$$

et nous aurons

$$V = \frac{a}{p} \sqrt{p^2 + a^2 t^2}.$$

Quant à l'accélération elle est précisément égale à celle de la projection du mobile sur Ox, c'est-à-dire à $\frac{a^2}{p}$.

202. *Composer les deux mouvements dirigés suivant les axes* Ox, Oy *rectangulaires*

$$x = at + \frac{1}{2}bt^2, \tag{1}$$

$$y = a't + \frac{1}{2}bt^2. \tag{2}$$

Construire la courbe indicatrice des vitesses.

Pour obtenir l'équation de la trajectoire il suffit d'éliminer t entre (1) et (2). Or, retranchons membre à membre ces deux équations, nous aurons

$$x - y = (a - a')t,$$

d'où

$$t = \frac{x - y}{a - a'};$$

enfin, substituons dans (1) il viendra

$$x = \frac{a}{a - a'}(x - y) + \frac{1}{2}\frac{b}{(a - a')^2}(x - y)^2.$$

Cette équation représente une parabole qui passe par l'origine et dont l'axe est parallèle à la droite $y - x = 0$.

La vitesse V dans le mouvement résultant est tangente à la trajectoire et sa grandeur s'obtient en appliquant la formule

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2;$$

il vient ainsi

$$V^2 = (a + bt)^2 + (a' + bt)^2.$$

D'autre part, si (γ) est le segment *accélération*, nous aurons

$$(\gamma) = (\gamma_x) + (\gamma_y);$$

mais $\gamma_x = b$, $\gamma_y = b$; et les deux accélérations composantes étant dirigées respectivement suivant Ox, Oy, (γ) aura pour grandeur $b\sqrt{2}$ et sera constamment parallèle à la bissectrice de l'angle xOy des axes.

Construisons maintenant la courbe indicatrice
pour cela, nous figurerons les segments OA ayant
commune le point O et équipollents aux vitesses
décrira la courbe cherchée; or, nous avons visiblen
coordonnées de A $\xi = V_x = a + bt$, $\eta = V_y =$

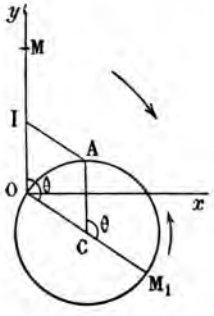
Eliminons t, nous obtiendrons

$$\xi - \eta = a - a'.$$

Cette équation représente une droite.

203. *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy
initial une circonférence est tangente à Ox *en* O *et*
un second point M. *Cette circonférence tourne u*
dans le sens des aiguilles d'une montre autour du po
mobile A *qui coïncidait à l'instant initial avec* M
sens contraire avec la même vitesse angulaire constant
le mouvement résultant du mobile A.

Supposons qu'au temps t la circonférence ait
l'angle $\theta = \omega t$; si le mol
fixé à cette circonférence il
en M_1, puisqu'il coïncidait
l'instant initial, mais en v
mouvement sur la courbe
l'arc $M_1A = R\theta = R\omega t$ et r
que CA est parallèle à Oy.
cet axe $OI = R$ et joign
figure OIAC est un losan
avons $IA = R$; par con
point A décrit une circon



centre I et de rayon R. Enfin, comme $\widehat{yIA} = \theta = \omega$
court sa trajectoire absolue d'un mouvement uniform
angulaire étant ω, dans le sens des aiguilles d'une m

204. *On a une série de losanges égaux articulés ; on*
ner avec la même vitesse autour du point O *les deu*

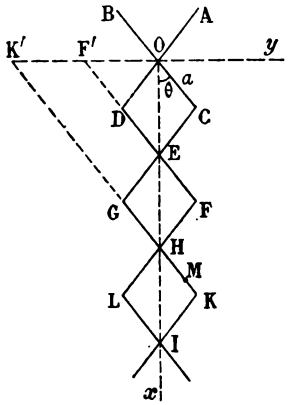
A *et* B; *le système s'allonge et se replie de telle sorte que les sommets* O, E, H, I *soient toujours sur la même droite.*

1° *Quelle est la loi du mouvement des points* E, H, I ?

2° *Quelles sont les trajectoires des points* C, F, K ?

3° *Quelle est la trajectoire d'un point* M *fixe sur l'un quelconque des côtés de ces losanges?*

1° D'après l'hypothèse, les points E, H, I décrivent une même droite Ox.



Nous avons en outre, en appelant a la longueur des côtés des losanges,

$$OE = 2a\cos\theta, \qquad OH = 4a\cos\theta,$$
$$OI = 6a\cos\theta.$$

Par suite, ω étant la vitesse angulaire des poignées OA et OB nous aurons $\theta_t' = \omega$ puis

$$V_E = -2a\omega\sin\theta,$$
$$V_H = -4a\omega\sin\theta,$$
$$V_I = -6a\omega\sin\theta.$$

Ces vitesses varient donc en progression arithmétique.

2° La trajectoire du point C est la circonférence de centre O et de rayon a.

Soient maintenant x, y les coordonnées de F, nous avons

$$x = 3a\cos\theta,$$
$$y = a\sin\theta;$$

d'où nous tirons, après élimination de θ,

$$\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

La trajectoire de F est donc une ellipse dont les axes, respectivement dirigés suivant Ox et Oy, ont pour longueurs $2a$ et $6a$.

On trouve pareillement pour équation de la trajectoire de K

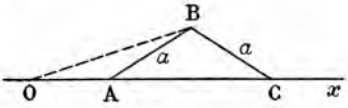
$$\frac{x^2}{25a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Cette équation représente une ellipse dont le
suivant Ox et Oy ont pour grandeurs $2a$ et $10a$.

Ce résultat pouvait s'obtenir autrement. En effe
FD et KG jusqu'aux points F′ et K′ où ils rer
nous avons $EF' = 2a$, $HK' = 4a$. Ces segments
et leurs extrémités décrivant deux axes rectangul
tout point de ces segments décrit une ellipse.

3° En vertu de cette dernière remarque, la trajec
M appartenant au côté HK est une ellipse symétr
port aux axes choisis.

205. *Les extrémités* A, C *de deux barres égales,* B, *décrivent une même droite* Ox, *suivant les lois*



$$OA = f(t),$$

1° *Trajectoire*
2° *Déterminer*
$f(t)$ *de façon que*
décrive sa trajectoire d'un mouvement uniforme.

1° Nous avons dans les triangles OAB et OCB
$AB = CB = a$,

$$(1) \qquad \overline{OB}^2 = a^2 + \overline{OA}^2 - 2a.OA \cos \widehat{OAB},$$

$$(2) \qquad \overline{OB}^2 = a^2 + \overline{OC}^2 - 2a.OC \cos \widehat{OCB},$$

mais $\widehat{OCB} = 180° - \widehat{OAB}$, de sorte que (2) s'écrit

$$(2)' \qquad \overline{OB}^2 = a^2 + \overline{OC}^2 + 2a.OC \cos \widehat{OAB}.$$

Éliminons $\cos \widehat{OAB}$ entre (1) et (2)′; nous obtiendrons
quant que l'on a d'après l'hypothèse $OA.OC = k^2$,

$$\overline{OB}^2 = a^2 + k^2.$$

Donc B décrit la circonférence ayant O pour centre
pour rayon.

2° Si B décrit sa trajectoire d'un mouvement unif
pourrons écrire $\widehat{BOx} = \omega t$, ω étant une consta
triangle OAB nous donnera

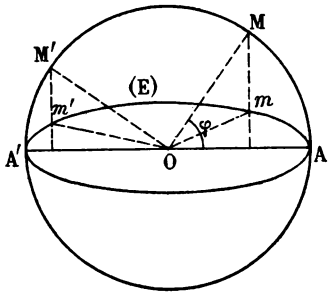
$$a^2 = a^2 + k^2 + \overline{OA}^2 - 2\sqrt{a^2+k^2}.OA \cos \omega t,$$

d'où, après résolution,

$$OA = f(t) = \sqrt{a^2+k^2} \cos \omega t \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t - k^2 \sin^2 \omega t}.$$

206. *La projection d'une circonférence* O *sur un plan passant par l'un de ses diamètres* AA′ *est une ellipse* (E). *Un point* M *décrit la circonférence avec la vitesse angulaire constante* ω. *Calculer la vitesse et l'accélération du point* m *de l'ellipse, projection de* M.

Rapportons l'ellipse à ses axes ; si nous appelons φ l'angle du rayon OM du cercle avec OA, les coordonnées de m s'écriront



$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi ;$$

d'ailleurs, en vertu de l'hypothèse sur le mouvement de M on a

$$\varphi = \omega t,$$

l'origine des temps étant convenablement choisie.

Soient V_x, V_y les projections de la vitesse de m sur les axes, nous aurons, d'après un théorème connu,

$$V_x = x'_t = -a\omega \sin \varphi, \qquad V_y = y'_t = b\omega \cos \varphi.$$

La vitesse de m est tangente à l'ellipse E et a pour grandeur

$$(1) \qquad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \omega\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Or, considérons dans la circonférence, le rayon OM′ incliné de $\frac{\pi}{2} + \varphi$ sur OA, il est perpendiculaire à OM, par suite Om' et Om sont deux demi-diamètres conjugués ; d'ailleurs m' a pour coordonnées $-a \sin \varphi$ et $b \cos \varphi$ et la relation (1) s'écrit plus simplement $V = Om'.\omega$.

Calculons maintenant l'accélération, si J_x et J_y sont ses pro-

jections sur les axes, nous avons

$$J_x = (V_x)'_t = -a\omega^2 \cos\varphi = -\omega^2 x,$$
$$J_y = (V_y)'_t = -a\omega^2 \sin\varphi = -\omega^2 y,$$

d'où
$$\frac{J_x}{x} = \frac{J_y}{y} = -\omega^2.$$

L'accélération est donc dirigée suivant mO, et ve
de l'ellipse.

Sa grandeur est donnée par

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2},$$

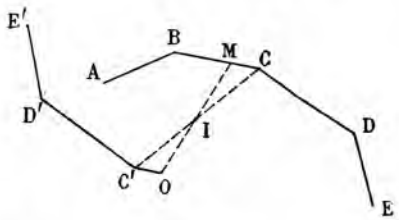
ou bien

$$J = Om.\omega^2.$$

En résumé, si le point M décrit la circonférence d
ment uniforme, la vitesse de sa projection m est prop
au diamètre conjugué de Om, et son accélération, co
dirigée vers le centre O, varie proportionnellemen
vecteur Om.

207. *Trajectoire et mouvement apparents d'un poi
rapport à un observateur mobile* (*).

Soit un observateur qui décrit le contour polygona
et supposons qu'arrivé à la position M il regarde
invariable
sa trajecto



Pendant
crira le seg
le point f
paraîtra c
segment O
parallèle à
de sens contraire ; en outre, le point O étant en rep
sa vitesse relative sera égale, et directement opposée à

(*) Nous supposons bien entendu que l'observateur est animé
vement de translation c'est-à-dire qu'il se déplace parallèle
même.

traînement et le mouvement de ce point sur OC′ sera le même que celui de M sur MC.

Pareillement, quand M décrira CD, le point O parcourra apparemment et suivant la même loi le segment C′D′ = CD, etc... Ceci remarqué, on voit que les droites MO, CC′, DD′, ... et plus généralement toutes les droites ayant pour extrémités deux points homologues sont concourantes en leur milieu I, les figures MCOC′, CDC′D′, ... étant des parallélogrammes.

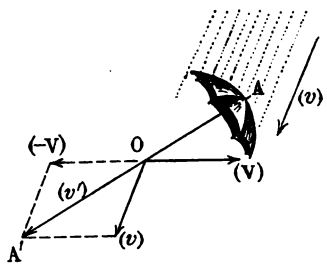
La trajectoire apparente du point O est donc le polygone OC′D′E′... symétrique du polygone ABCD... par rapport au point I.

On passe d'ailleurs aisément du cas où la trajectoire de l'observateur est une ligne brisée à celui où elle est curviligne.

Enfin, lorsque cette courbe est plane, la trajectoire apparente du point fixe est une courbe égale, et ces deux courbes sont parcourues suivant la même loi.

208. *Direction la meilleure à donner à son parapluie.*

Nous supposons le voyageur et les gouttes de pluie animés de mouvements uniformes et dans des directions situées dans un même plan vertical.



Le voyageur doit évidemment quand il est au repos donner au manche de son parapluie la direction absolue des gouttes d'eau, et quand il marche, celle de la direction relative, le mouvement d'entraînement étant celui du voyageur.

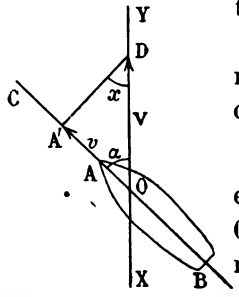
Par conséquent, si V et v sont les vitesses du voyageur et des gouttes de pluie, la vitesse relative v' de celles-ci sera définie par l'égalité géométrique

$$(v') = (v) - (V),$$
$$(v') = (v) + (-V).$$

La construction connue donne $(OA') = (v')$, d
le manche du parapluie devra être dirigé suivant OA.

209. *Soit* OC *la route d'un navire à voile, v sa vite*
direction du vent, et V *sa vitesse; soit, de plus,* α *l'*
quille AB *du navire avec* XY. *On demande l'angle de*
véritable du vent avec la direction apparente.

Imaginons dans l'air un corps très léger M; il ser
par le vent avec la vitesse V. C
tesse absolue V_a.



Si ce corps est observé par un
navire, le mouvement d'entraîn
celui du navire, et l'on aura (V

Or, $(V_r) = (V_a) - (V_e)$,

et pour avoir (V_r), nous porteron
$OD = V$; A'D sera la vitesse d
rapport au navire.

En effet, on a bien

$$(V) = (v) + (A'D),$$

d'où

$$(A'D) = (V) - (v).$$

La grandeur de la vitesse relative se calcule aisém
effectivement

$$\overline{AD}^2 = V^2 + v^2 - 2Vv \cos \alpha.$$

Calculons l'angle x; nous avons

$$\frac{\sin x}{v} = \frac{\sin(\alpha + x)}{V},$$

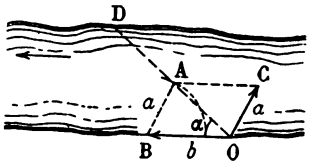
d'où nous tirons sans difficulté

$$\operatorname{tg} x = \frac{v \sin \alpha}{V - v \cos \alpha}.$$

210. *Un nageur faisant a mètres par minute, veu*
une rivière dont le courant a une vitesse de b mètres à

en partant d'un point donné O *pour atterrir en un point* D *de la rive opposée. Dans quelle direction doit-il nager?*

Pour un observateur en repos placé sur la rive, le mouvement du courant est le mouvement d'entraînement; la vitesse d'entraînement est donc dirigée suivant la rive et égale à b.



Le mouvement absolu est le mouvement du nageur dans la direction OD, faisant l'angle α avec la rive. D'autre part, en vertu de l'égalité géométrique

$$(V_a) = (V_e) + (V_r),$$

nous aurons un parallélogramme OBAC dans lequel les côtés seront

$$OB = V_e = b, \qquad BA = V_r = a, \qquad \widehat{AOB} = \alpha.$$

Pour le construire, il suffit de considérer simplement le triangle OAB. Dans ce triangle, nous connaissons l'angle $AOB = \alpha$, et les deux côtés $OB = b$, $AB = a$, c'est-à-dire deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. On obtiendra donc la direction BA, ou le point A en coupant OD par la circonférence de centre B et de rayon a.

La discussion, qui est traitée dans tous les cours, peut se résumer comme il suit :

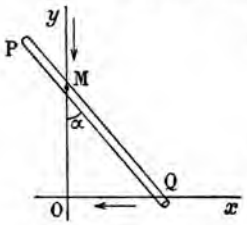
$$\alpha < 90^\circ \begin{cases} a < b \sin\alpha, & \text{0 solution,} \\ a = b \sin\alpha, & \text{1 sol.} \\ b \sin\alpha < a < b, & \text{2 sol.} \\ a > b, & \text{1 sol.} \end{cases}$$

$$\alpha \geqslant 90^\circ \begin{cases} a < b, & \text{0 sol.} \\ a > b, & \text{1 sol.} \end{cases}$$

On voit d'ailleurs que la trajectoire relative du nageur sera rectiligne. Quand le problème admet deux solutions, l'un des chemins est plus long que l'autre.

211. *Un point* M *est animé d'un mou*
vitesse V *suivant* yO ; *un tube* PQ *est an*
de translation rectiligne dans la direction
Quelle doit être la vitesse dans ce dernier m
mobile suive l'axe du tuyau ?

Dans son mouvement, chaque point du tu
parallèle à Ox, pa
toujours le même a
Ceci posé, comm
OM =
le triangle rectang
nera
OQ = OM tg α



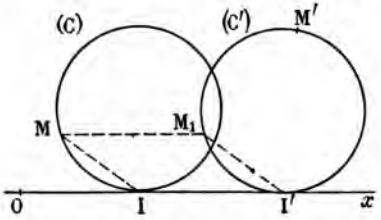
Par conséquent la translation du tube
vitesse, dirigée suivant xO, aura pour valeu
Quand on observe une étoile au moye
vertu du mouvement de translation de la T
cette lunette pour que le rayon lumineux p
axe. On voit ainsi que l'inclinaison α sera do

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{V},$$

dans laquelle v représente la vitesse 29^{km},
notre planète, et V la vitesse de la lumièr
on a $V = 298000^{km}$, et l'on trouve $\alpha =$

212. *Tracé de la tangente à la cycloïde.*

La cy
engend
fixe M
(C) qui
sur une
Soie
positio
et M,
respondantes du point M ; nous aurons, e



tion du roulement sans glissement,

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{arc IM} = \text{OI}, \\ \text{arc I'M'} = \text{OI'}. \end{cases}$$

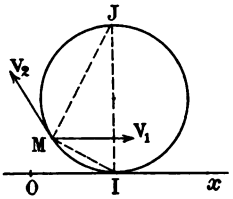
Prenons arc $I'M_1$ = arc IM et joignons MM_1 ; MM_1 est égale et parallèle à II', et les égalités (1) nous donneront

$$\text{arc I'M'} - \text{arc IM} = \text{OI'} - \text{OI},$$

ou bien

$$\text{arc } M_1M' = MM_1.$$

Par conséquent, le mouvement du point M peut être considéré comme résultant de la translation MM_1 parallèle à Ox et du déplacement $M_1M' = MM_1$ sur la courbe.



D'autre part, comme on a

$$\lim. \frac{\text{arc } M_1M'}{\Delta t} = \lim. \frac{MM_1}{\Delta t},$$

les vitesses V_1, V_2 de ces deux mouvements sont égales et leur résultante sera dirigée suivant la bissectrice MJ de l'angle V_1MV_2.

La normale MI à la cycloïde au point M s'obtiendra donc en joignant ce point au point de contact de la circonférence avec Ox.

EXERCICES

192. — Composer les deux mouvements rectilignes et rectangulaires suivant Ox, Oy, connaissant les lois des espaces

$$x = 1 + t + t^2, \qquad y = 1 - t + t^2.$$

Trajectoire, vitesse, accélération.

193. — Un segment rectiligne $AB = a$, glisse suivant Ox et un point M se meut sur AB ; sachant que l'on a

$$OA = a \sin 2t, \qquad AM = a \cos^2 t,$$

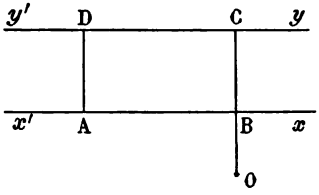
étudier le mouvement du point M sur Ox.

194. — Composer les deux mouvements rectilignes laires suivant Ox, Oy connaissant les lois des espaces

$$x = a \cos^2 t, \qquad y = a \sin^2 t.$$

Trajectoire, vitesse, accélération.

195. — Un rectangle ABCD se meut d'un mouveme tion uniforme, avec la côtés AB, CD glissen ment sur les droites i yy'. Au moment où le dans la position ABCD situé sur CB est lanc tesse V suivant la dire demande : 1° à quelle en quels points F, G le mobile rencontrera AB et CD ; la distance FG et l'angle de cette droite avec BC.



On donne $OB = b$, $BC = a$.

Application : $v = 30^m$, $V = 240^m$, $a = 3^m,5$, $b =$

(*Bacc. ès sciences, Lille,*

196. — Un point M décrit d'un mouvement uniform férence de diamètre AB. Étudier le mouvement du corde AM.

197. — Une droite AB de longueur constante l se m que ses extrémités A, B glissent respectivement sur rectangulaires Ox, Oy. La vitesse du point A est repr $\frac{k}{OA}$, k étant une constante. Étudier le mouvement d tion du point O sur AB : 1° dans le plan Oxy, 2° sur le s

198. — Quelle est la condition pour que le mouveme de deux mouvements rectilignes et uniformément vari rectiligne et uniformément varié ?

199. — Dans quel cas la projection sur un axe, du d'un point, est-elle un mouvement uniforme ?

200. — Appliquer la méthode de Roberval à la cons la tangente à la parabole.

201. — Même question pour la conchoïde de droite.

202. — Un point M décrit une droite Ox d'un mouvement uniforme, pendant que cette droite tourne uniformément autour de O dans un plan. Construire la tangente à la trajectoire du point M.

203. — Direction de la girouette d'un navire connaissant la vitesse du navire et celle du vent.

204. — Une droite AB s'appuie sur un point fixe O sur lequel elle peut glisser, pendant que son extrémité A décrit d'un mouvement uniforme une droite (D). Mouvement relatif de O sur AB.

205. — Deux trains vont en sens contraire l'un de l'autre, le premier avec une vitesse v_1, le second avec une vitesse v_2. Un voyageur placé dans le premier train observe que le second a mis n secondes pour passer. Calculer la longueur du second train.

206. — Les extrémités d'un segment $AB = 2a$ glissent sur deux axes rectangulaires Ox, Oy ; en posant $\widehat{OAB} = \theta$ on suppose que l'on a $\theta = \omega t$. Trouver la trajectoire et le mouvement relatifs de O par rapport à AB.

207. — Dans une horloge, trouver le mouvement relatif de l'aiguille des minutes par rapport à l'aiguille des heures.

208. — Un bateau remontant un fleuve met le temps θ pour parcourir l'espace e ; quand il le descend, il met le temps θ' pour parcourir le même espace. Trouver la vitesse du courant et la vitesse que posséderait le bateau sur une eau tranquille.

209. — Une barque qui aurait une vitesse de 1^m sur une eau tranquille, traverse une rivière de 50^m de large. Partant d'un point donné d'une rive, elle se dirige dans une direction donnée. 1° En quel point abordera-t-elle ? 2° Calculer le chemin parcouru.

210. — Un cylindre vertical fait autour de son axe 3 tours par seconde ; un poids muni d'un stylet tombe librement le long du cylindre. On demande la nature de la courbe tracée et le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au bout de $\frac{1}{2}$ seconde de chute.

(*Bacc., Oran, 1895.*)

211. — Un observateur est placé dans un bateau A qui se laisse entraîner par le courant d'un fleuve et regarde deux bateaux B, B'.

Le premier descend le fleuve, le second le remonte et i
le même espace e pendant le même temps θ. Sachan
teaux qui étaient primitivement à la distance d se r
bout du temps θ', on demande la vitesse du courant.

212. — Un point M se meut d'un mouvement unifc
circonférence de centre O, pendant que le point O d
contraire, sur une autre circonférence dans le même
de même graduation ; étudier le mouvement du point

(ANTOMARI et L

213. — On donne deux circonférences C, C′ mob
même plan. La circonférence C a pour rayon $\frac{91}{80}a$,
déplace d'un mouvement uniforme de vitesse a sur l
La circonférence C′ a pour rayon $\frac{11}{80}a$, son centre e
deux mouvements uniformes simultanés ; le premier
parallèle à CX, le deuxième de vitesse $6a$ perpendicu
A l'origine des temps, CC′ est perpendiculaire à (
$\frac{3a}{4}$.

1° Calculer $C_1C'_1$ à l'époque t ;

2° Indiquer pour les différentes valeurs de t les posit
des deux circonférences.

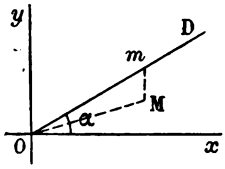
(*Bacc. spécial, Chan*

CHAPITRE III

MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE

---

213. Supposons qu'on lance un projectile du point O dans la direction OD, faisant l'angle α avec l'horizontale Ox, et avec une vitesse initiale v_0.



Si le projectile n'était pas pesant, il viendrait au bout du temps t en m tel que

$$Om = v_0 t;$$

mais la pesanteur agissant sur ce mobile l'a fait descendre pendant ce temps de $\overline{mM} = \frac{1}{2} gt^2$.

En résumé, au temps t le projectile se trouve en M. Or, nous avons

$$(OM) = (Om) + (mM);$$

par suite, si, appelant x et y les coordonnées de M, nous projetons successivement sur les axes, il viendra

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha . t, \\ y &= v_0 \sin\alpha . t - \frac{1}{2} gt^2. \end{aligned} \right.$$

Ces deux formules représentent aussi les projections du mouvement sur les axes.

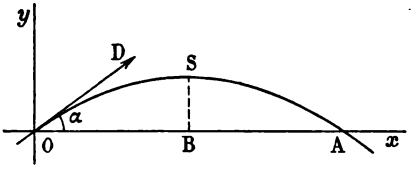
214. *Trajectoire.* — Éliminons t entre les équations (1), il vient

$$(2) \qquad y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe est parallèle à Oy; son sommet S a pour coordonnées

$$x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \qquad y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Flèche. — C'est l'ordonnée BS du sommet ; on a donc



Flèche

Portée ou
— On appe
gueur de la
parabole cor
zontale du p
Les coordo
sont $x = OA$ et $y = 0$; en écrivant qu'elles vérifient l'équat

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

215. *Vitesse*. — Elle est tangente à la parabole ; d'autre
tions sur les axes étant

$$V_x = v_0 \cos \alpha, \qquad V_y = v_0 \sin \alpha - gt,$$

on a

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = v_0^2 - 2v_0 g \sin \alpha . t + g^2 t^2,$$

ou plus simplement,

$$V^2 = v_0^2 - 2gy.$$

La vitesse a donc même valeur pour deux positions du
triques par rapport à l'axe de la parabole.

216. *Accélération*. — L'accélération du mouvement pro
nulle, celle du mouvement projeté sur Oy est égale à $-g$
l'accélération du projectile est constante en grandeur et d
représentée par un segment de grandeur g parallèle à la
dante.

217. *Parabole de sûreté*.— La vitesse v_0 étant donnée, si
d'atteindre un point donné $(x'y')$ du plan, il faut donner à l
naison α définie par l'équation

$$y' = x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx'^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

qui s'écrit encore

$$\frac{gx'^2}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x' \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx'^2}{2v_0^2} + y' = 0.$$

Il existe donc, en général, deux directions α répondant à l
Pour qu'il y ait possibilité il faut que l'on ait

$$(3) \qquad y' + \frac{gx'^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} \leqslant 0.$$

L'équation

$$y + \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} = 0$$

représente une parabole ayant pour axe Oy, c'est la *par*

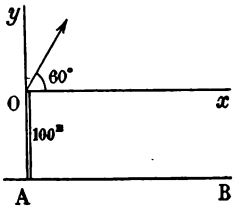
Pour que l'inégalité (3) soit vérifiée, il faut que le point $(x'y')$ soit situé à l'intérieur de cette parabole.

On démontre que, v_0 étant donnée, toutes les trajectoires qu'on obtient en faisant varier l'inclinaison α sont tangentes à la parabole de sûreté.

218. *Du haut d'une tour de* 100^m *de hauteur on lance sous une inclinaison de* 60° *un projectile avec une vitesse initiale de* 50^m. *On demande à quelle distance du pied de la tour, il atteindra le plan horizontal qui passe par ce pied et quel temps il mettra à y parvenir.*

(*Conc. acad., Bordeaux, 1879.*)

Par le sommet de la tour traçons l'horizontale Ox et la verticale Oy, le plan xOy contenant la vitesse initiale ; les équations du mouvement du projectile étant



$$x = v_0 \cos\alpha . t, \quad y = v_0 \sin\alpha . t - \frac{1}{2} g t^2,$$

s'écriront dans le cas actuel où l'on a

$$v_0 = 50, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x = 25t, \qquad y = 25\sqrt{3}\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Si B est le point du plan horizontal passant par le pied de la tour où tombe le projectile, les coordonnées de ce point seront AB et -100 ; nous aurons alors, t étant la durée de la chute,

$$(1) \qquad AB = 25t,$$

$$(2) \qquad -100 = 25\sqrt{3}\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

L'équation (2) nous donne $t = 10^{sec},7$ environ ;

en substituant dans (1), il vient

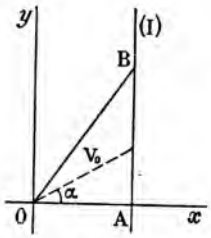
$$AB = 267^m \text{ environ.}$$

219. *Construire* l'indicatrice des vitesses *qui correspond au mouvement d'un projectile dans le vide.*

Les équations du mouvement d'un proje

$$x = V_0 \cos \alpha . t, \qquad y = V_0 \sin \alpha .$$

Soient X et Y les coordonnées d'un poi vitesses ; en choisissant pour origine com



vitesses l'origine des avons $X = V_x$, ou bien

$$X = V_0 \cos \alpha,$$

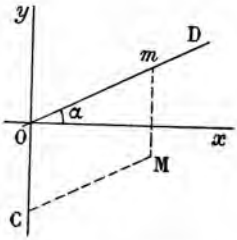
Par suite, le lieu du droite (I) qui a pour é

$$X = V_0$$

On peut aisément à l'aide de cette indicatri tion du segment OB équipollent au segme point B décrit (I). Ainsi, on voit que la vit pond au point A, elle est donc horizontal alors situé au sommet de la parabole trajecto

220. *On lance du même point et au même tiles dans toutes les directions et avec la même qu'à une époque quelconque tous ces mobil une même surface sphérique.*

Considérons au temps t donné celui de ces



lancé, avec la vitess l'inclinaison α.

Pour obtenir sa p de porter $Om = v_0 t$, mM parallèle à la ver et égal à $\frac{1}{2} g t^2$.

Or, portons OC =

OmMC est un parallélogramme et nous avons

$$CM = Om = v_0 t.$$

Le temps t étant donné, C est fixe et CM est constante, c'est-à-dire indépendante de α; par suite, toutes les positions M des mobiles au même instant t, se trouvent sur la surface de la sphère qui a pour centre C et rayon $\frac{1}{2} gt^2$.

221. *Étant donnés deux points* A *et* B *du même plan horizontal, situés à une distance d, on lance au même moment un projectile partant de* A *suivant la verticale avec la vitesse initiale* v_0 *dirigée de bas en haut, puis un deuxième projectile partant de* B *suivant la direction du plan vertical passant par* AB *qui fait l'angle* α *avec* AB.

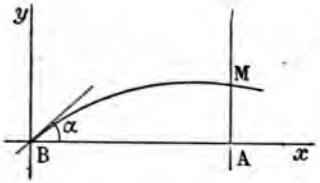
1° *Calculer la vitesse initiale du deuxième projectile pour qu'il rencontre le premier ;*

2° *Voir si la rencontre se fait pendant l'ascension ou pendant la descente du premier et du second projectile.*

(*Saint-Cyr.*)

Les équations du mouvement du projectile lancé du point B sont

$$x = v \cos \alpha . t, \qquad y = v \sin \alpha . t - \frac{1}{2} gt^2.$$



Supposons qu'il rencontre au temps t le mobile lancé du point A ; nous aurons

$$d = v \cos \alpha . t,$$

$$AM = v \sin \alpha . t - \frac{1}{2} gt^2,$$

$$AM = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2.$$

Nous tirons de ces équations

$$(1) \qquad v = \frac{v_0}{\sin \alpha},$$

$$t = \frac{d}{v_0} \operatorname{tg} \alpha.$$

La relation (1) montre que le mouvement vertical du mobile

parti de B est le même que celui du mobile lancé v
du point A.

La durée de l'ascension de ces mobiles étant $\frac{v_0}{g}$, (
résumé

$$\frac{d}{v_0}\operatorname{tg}\alpha < \frac{v_0}{g} \text{ : rencontre pendant l'ascensi}$$

$$\frac{d}{v_0}\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{g} \text{ : rencontre à la culmination ;}$$

$$\frac{d}{v_0}\operatorname{tg}\alpha > \frac{v_0}{g} \text{ : rencontre pendant la descen}$$

222. *On lance au même instant deux projectiles (
avec des vitesses v_0, v_1 sous des inclinaisons α_0 et (
jectoires ont en commun le point* O *et un second poin
ver l'intervalle de temps qui s'écoule entre les passag
projectiles au point* M.

Les équations du mouvement, et celles des traje
deux projectiles s'écrivent

$$(P_0)\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha_0 . t, \\ y = v_0 \sin\alpha_0 . t - \frac{1}{2} g t^2, \\ y = \operatorname{tg}\alpha_0 . x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha_0} ; \end{cases}$$

$$(P_1)\begin{cases} x = v_1 \cos\alpha_1 . t, \\ y = v_1 \sin\alpha_1 . t - \frac{1}{2} g t^2, \\ y = \operatorname{tg}\alpha_1 . x - \frac{g x^2}{2 v_1^2 \cos^2\alpha_1} . \end{cases}$$

Soient x', y' les coordonnées du point commun M
trajectoires, nous avons

$$y' = \operatorname{tg}\alpha_0 . x' - \frac{g x'^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha_0} = \operatorname{tg}\alpha_1 . x' - \frac{g x'^2}{2 v_1^2 \cos}$$

d'où nous tirons

$$x' = \frac{2(\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}\alpha_1)}{g\left(\dfrac{1}{v_0^2\cos^2\alpha_0} - \dfrac{1}{v_1^2\cos^2\alpha_1}\right)}.$$

Ceci posé, si nous appelons t_0 et t_1 les époques auxquelles les deux projectiles passent au point M, nous aurons

$$t_0 = \frac{x}{v_0\cos\alpha_0}, \qquad t_1 = \frac{x'}{v_1\cos\alpha_1},$$

d'où, τ étant l'intervalle de temps qui s'écoule entre les deux passages,

$$\tau = \left|x'\left(\frac{1}{v_0\cos\alpha_0} - \frac{1}{v_1\cos\alpha_1}\right)\right| = \frac{2v_0v_1\cos\alpha_0\cos\alpha_1(\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}\alpha_1)}{g(v_0\cos\alpha_0 + v_1\cos\alpha_1)}.$$

Remarque. — Pour que les deux projectiles passent effectivement au point commun M, il faut que l'on ait

$$t_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad t_1 > 0,$$

c'est-à-dire, comme on peut toujours supposer $\cos\alpha_0 > 0$,

$$x' > 0 \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha_1 > 0,$$

ou bien

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}\alpha_1}{v_1\cos\alpha_1 - v_0\cos\alpha_0} > 0, \qquad \cos\alpha_1 > 0.$$

Ces inégalités sont d'ailleurs faciles à interpréter.

223. *Un projectile est lancé sous une inclinaison connue* α, *avec une vitesse telle, que la trajectoire passe en un point donné* A. *On sait que la droite qui joint le point de départ* O *au point* A *fait avec l'horizon un angle* β, *et que le corps parcourrait cette droite en* n *secondes, s'il se mouvait uniformément avec la vitesse initiale. Déterminer l'instant auquel le projectile atteindra le point* A. (P. Jullien)

Si v_0 est la vitesse initiale, les formules du mouvement du projectile seront

$$(1) \qquad x = v_0\cos\alpha t,$$

$$(2) \qquad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point A ; mettra le mobile pour arriver en A sera, en vert

$$(3) \qquad t = \frac{x_1}{v_0 \cos \alpha};$$

mais $\quad OA = nv_0 \quad$ et $\quad OA = \frac{x_1}{\cos \beta}$

donc

$$\frac{x_1}{v_0} = n \cos \beta,$$

et en portant dans (3) on obtient

$$t = n \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

EXERCICES

214. — Deux projectiles tirés par une même pièce calement s'échappent de la bouche du canon avec u 100^m par seconde et à deux secondes d'intervalle. A q se rencontreront-ils sachant que $g = 9^m,80$?

(*Bacc., Grenoble*

215. — Un point M est lancé dans le vide, à partir suivant l'horizontale Ax, avec une vitesse donnée a.

Trouver à l'époque t : 1° la distance du point M à l'hc à la verticale Ay et au point A ; 2° les composantes parallèles à Ax et à Ay, la valeur de cette vitesse et l fait avec l'horizontale.

(*Bacc., Lille,*

216. — Un boulet de canon est lancé du point A, plan horizontal, avec une vitesse v, dont la direction fa avec le plan horizontal. On demande : 1° d'expliquer peut trouver la position occupée par ce corps au bou donné t ; 2° connaissant la hauteur maximum h à laq

ce boulet et la distance a du point A au point B où ce boulet retombe sur le sol, de calculer v et α.

Application : $h = 88^m,24$, $a = 325^m,75$.

(*Bacc. spécial, Alger, 1887.*)

217. — Un corps pesant, lancé de bas en haut, avec une vitesse initiale inclinée de 60°, va retomber sur le sol à une distance de son point de départ égale à 100^m. A quelle hauteur maxima s'est-il élevé ?

(*Brev. de l'ens. spécial, Douai, 1881.*)

218. — Un but C est élevé de 100^m au-dessus du plan horizontal passant par le lieu A où l'on se trouve. Sa projection B sur ce plan est située à 250^m de A. On veut de ce point A atteindre le but C, en lançant avec une vitesse de 50^m un projectile pesant. Quelle valeur α faut-il donner à l'angle que fait la vitesse initiale avec l'horizon?

(*Brev. ens. spécial, Douai, 1881.*)

219. — Un projectile est lancé sous une inclinaison de 60° avec une vitesse de 200^m. On demande : 1° la direction et la grandeur de la vitesse au bout de 5 secondes ; 2° la plus grande hauteur qu'il atteint ; 3° au bout de combien de temps il se trouvera à 100^m au-dessus du plan horizontal d'où il est parti.

(*Diplôme ens. spécial, Bordeaux, 1877.*)

220. — Un projectile est lancé horizontalement avec une vitesse de 200^m ; il tombe sur un plan horizontal situé à 10^m au-dessous du point de départ; on demande la durée de la chute.

221. — La portée d'un projectile est de 800^m, la durée de son mouvement égale 10 secondes ; déterminer la direction et la grandeur de la vitesse initiale.

222. — On lance au même instant, deux projectiles des points O et I situés sur la même horizontale à la distance a, avec des vitesses v_0, v_1 dont les directions contenues dans le même plan vertical font entre elles un angle droit. Calculer la distance minima de ces projectiles. Condition pour que ces deux projectiles se rencontrent.

223. — Un projectile pesant est lancé avec une vitesse initiale de $65^m,9$. La direction de cette vitesse fait avec l'horizontale un angle

de 60° : 1° Position du sommet de la parab
du mobile en ce point ; 3° temps qu'il en
sommet ; 4° amplitude du jet?

(*Conc. acad., ens. spécial,*

224. — On lance un mobile pesant av
Trouver la direction suivant laquelle on do
projectile rencontre l'horizon en un point
jectile y arrivent ensemble.

225. — Un boulet de canon partant de O p
atterrir en P. Calculer OP, sachant qu'au
tend le boulet de canon tomber en P.

226. — Un projectile décrit une parabole
tion des deux tangentes à la trajectoire au
ont un produit constant est un cercle décri
bole comme centre.

227. — D'un point donné et dans le même
des projectiles dans des directions différentes
initiale ; trouver le lieu des foyers des trajec

CHAPITRE IV

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN

On peut supposer qu'un plan soit formé de deux feuillets, l'un fixe, l'autre pouvant glisser sur le premier; si une figure est tracée sur le feuillet mobile, on réalise ainsi tout déplacement de cette figure dans son plan.

224. Théorème de Chasles. — *Si l'on considère deux positions d'une figure se déplaçant dans son plan, on peut passer de l'une à l'autre par une rotation autour d'un certain point du plan.*

En particulier, si les deux positions sont infiniment voisines, le point autour duquel il faut effectuer la rotation porte le nom de *centre instantané de rotation.*

Ainsi, si le déplacement de la figure mobile ou, comme on dit encore, du *plan mobile* est bien défini, à toute position de la figure correspond un centre instantané.

Les remarques suivantes sont très importantes.

225. *A un instant quelconque :*

1° *Les normales menées par les différents points de la figure mobile aux trajectoires qu'ils décrivent, concourent au centre instantané ;*

2° *La normale à toute courbe invariablement liée au plan mobile, au point où elle touche son enveloppe, passe par le centre instantané ;*

3° *Les vitesses de deux points quelconques du plan mobile sont perpendiculaires aux droites qui joignent ces points au centre instantané et proportionnelles aux longueurs de ces segments.*

1° et 3° se démontrent sans difficulté ; la démonstration de 2° étant plus délicate, on se borne à l'énoncé.

226. Base *et* roulante.

Théorème. — *Le déplacement continu d'un plan mobile sur un plan fixe*

peut être réalisé par le roulement sans glissement, d'une c du plan mobile, appelée ROULANTE, *sur une courbe du pla* BASE.

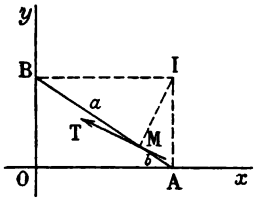
La *base* est le lieu des centres instantanés dans le plan fixe est le lieu de ces mêmes points dans le plan mobile. On s'ap remarque pour rechercher la base et la roulante dans un donné.

227. MOUVEMENT CYCLOÏDAL. — On appelle ainsi un mouveme la base est une droite et la roulante une circonférence. On point de la roulante décrit une cycloïde, c'est la définition n courbe.

Remarque. — Si l'on considère le mouvement inverse, c mouvement dans lequel la base est une circonférence et la droite, on remarque que la droite roulante est constamment trajectoire d'un quelconque de ses points. — Ces trajectoires, de la propriété d'avoir leurs normales tangentes à une circo reçu le nom de *développantes de cercle.*

MOUVEMENT ÉPICYCLOÏDAL OU HYPOCYCLOÏDAL. — Dans ces mo base et la roulante sont des circonférences qui se touchent ex ou intérieurement.

228. *Compas elliptique.* — Etant donnés deux axe laires Ox, Oy et un segment AB de longueur inva les extrémités sont assujetties les axes précédents, on sait point fixe de ce segment c ellipse. Ainsi, si nous consi point M de AB, tel que $BM = a$, ce point décrira u dont les axes sont Ox, Oy e longueurs $2a$ et $2b$.



Dans le cas particulier où M est le milieu de AB, toire est la circonférence de centre O et de rayon OM

Cette génération mécanique de l'ellipse nous donne velle construction de la tangente à cette courbe.

Effectivement, le centre instantané qui correspond à tion AB du segment est à l'intersection I des normal aux trajectoires Ox, Oy des points A et B ; par suite,

normale en M à l'ellipse trajectoire de ce point, et MT perpendiculaire, est la tangente.

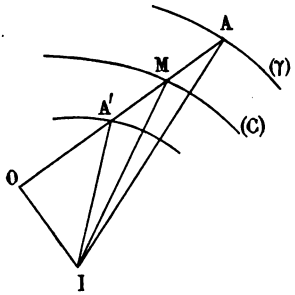
Déterminons enfin la *base* et la *roulante* qui correspondent au déplacement de AB.

Si nous joignons OI, nous avons OI = AB = const., par conséquent la base est la circonférence de centre O et dont le rayon égale AB. L'angle BIA étant droit le lieu du point I dans le plan mobile, c'est-à-dire par rapport à AB, est la circonférence décrite sur AB comme diamètre.

En résumé, le déplacement de AB peut être aussi réalisé en faisant rouler intérieurement une circonférence sur une autre de rayon double.

229. *Construire la normale en un point quelconque d'une conchoïde plane.*

Soit la courbe (C) supposée plane et un point O de son plan ; si l'on porte sur les rayons vecteurs OM, MA = MA′ = l, le lieu des points A, A′ est une *conchoïde* de la courbe (C).



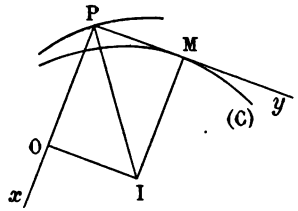
Considérons le segment AA′ comme une figure invariable se déplaçant dans son plan; son milieu M décrivant la courbe (C) et sa direction passant par le point fixe O, le centre instantané I est l'intersection de la normale MI à (C) et de la perpendiculaire OI à OM.

Par suite IA et IA′ seront les normales à la conchoïde (γ), aux points A et A′.

230. *Construction de la normale aux podaires des courbes planes.*

Soit une courbe plane (C) ; on appelle podaire de la courbe (C) par rapport à un point O de son plan le lieu des projections P du point O sur ses tangentes.

L'angle droit xPy constitue une figure invariabl
place dans son plan
ayant pour envelop
(C), tandis que Px
point fixe O.

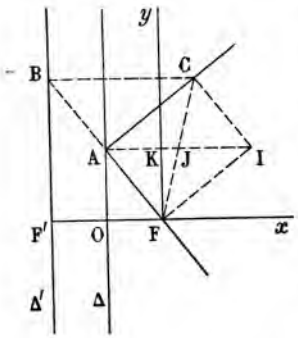


Le centre instantar
respond à son déplac
tésimal, est donc l
de la normale MI à
perpendiculaire OI à OP; par suite IP est la n
podaire au point P.

Par conséquent, si l'on sait construire la normal
connaîtra la normale à l'une quelconque de ses
réciproquement.

231. *Un angle droit se déplace dans son plan, l'un
passant par un point fixe et son sommet décrivant une
Démontrer que le second côté reste tangent à une
déterminer la base.*

Soit un angle droit dont le sommet A décrit la
dont un côté glisse sur le point fixe F.



Le centre instantané I
section des perpendicula
à Δ et en F au côté AF.

Le second côté touche
loppe au pied C de la perp
abaissée sur lui du point I

Par le symétrique F' de
port à Δ, menons la paral
et prolongeons FA jusqu
contre B avec Δ'; enfin joi

Les égalités

$$FA = AB, \qquad FJ =$$

nous prouvent que la figure ABCI est un parallélogram

$$CB = AI = CF,$$

et le lieu de C est la parabole qui a le point F pour foyer et pour directrice Δ'.

La base étant le lieu du point I dans le plan fixe, rapportons ce point aux axes xFy.

Le triangle rectangle AFI nous donne

$$\overline{FK}^2 = KA.KI,$$

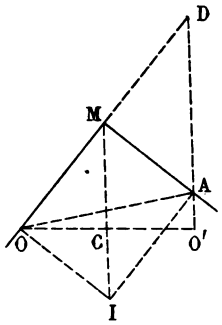
ou bien, en posant $OF = \frac{p}{2}$,

$$y^2 = \frac{p}{2}x.$$

La base est donc une parabole d'axe Fx, de sommet F et de paramètre $\frac{p}{4}$.

232. *Un angle droit se déplace dans son plan ; son sommet décrit une circonférence tandis que l'un des côtés passe par un point fixe : démontrer que le second côté enveloppe une ellipse ou une hyperbole.*

Soit l'angle droit OMA dont le sommet décrit une circonférence de centre C, le côté OM passant par le point fixe O ; le centre instantané est à l'intersection I du rayon CM et de la perpendiculaire en O à OM ; donc le point où MA touche son enveloppe est la projection A du point I sur ce côté.



Prenons le symétrique O' de O par rapport à C et joignons O'A jusqu'à sa rencontre D avec OM. Nous avons

$$O'A + OA = O'D = 2CM.$$

Donc le lieu du point A est une ellipse de foyers O, O' et dont le grand axe mesure le diamètre du cercle donné.

Lorsque les deux points O et C sont de part et d'autre du côté MA, on obtient comme lieu une hyperbole.

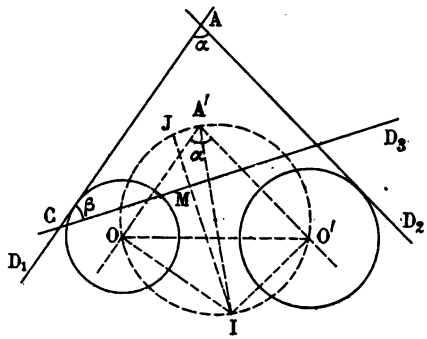
233. *Une figure plane se déplace dans son plan; deux droites de cette figure enveloppent des cir 1° trouver la base et la roulante; 2° démontrer qu droites de la figure mobile enveloppent des circonfére* (Bo

1° Soient les deux droites D_1, D_2 qui enveloppent ment dans le glissement de la figure mobile les circo et O'. Le centre instantané est l'intersection I des p laires menées par O et O' à ces deux droites.

Si nous posons $\widehat{D_1AD_2} = \alpha$, nous voyons $\widehat{OIO'} = 180° - \alpha$. La base est donc le segment $\widehat{180° - \alpha}$ décrit sur OO' comme corde.

Les parallèles à D_1 et à D_2 menées l'une par par O' se coupent évidemment sur la circonférence-b leur point de rencontre.

Ces droites OA' et O'A' et en particulier le point



être considé invariableme droites D_1 e à-dire à la figu or la longue constante et diamètre de l rence-base, d du point I da mobile est la rence de centr rayon A'I.

En résumé, on peut réaliser le déplacement de la faisant rouler une circonférence sur une autre de ray et située à l'intérieur.

2° Soit une droite quelconque D_3 de la figure $\widehat{ACD_3} = \beta$. Menons à cette droite la perpendiculaire le point où D_3 touche son enveloppe.

IM rencontre la circonférence-base en un point J q

car $\widehat{OIJ} = \beta$. Par suite les normales à l'enveloppe de D_3 passent par un point fixe J et cette courbe est une circonférence de centre J.

234. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse est une circonférence.*

Soit l'angle droit AMB circonscrit à une ellipse et considérons le plan qui lui est invariablement lié; dans le glissement continu de ce plan le centre instantané est le point de rencontre I des normales à l'ellipse aux points A et B.

La normale en M au lieu de ce point est la diagonale MI du rectangle AMBI; cette droite passe par le milieu de la corde AB et par suite par le centre O de l'ellipse.

La courbe lieu de M ayant toutes ses normales concourantes en O est une circonférence de centre O.

On voit immédiatement qu'elle a pour rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, en considérant le rectangle circonscrit à l'ellipse.

Remarque. — Le même raisonnement permet de trouver le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole ou à la parabole.

235. *Deux points* A *et* B *d'une figure plane de forme invariable, mobile dans son plan, décrivent leurs trajectoires d'un mouvement uniforme. Trouver le lieu du centre instantané dans la figure mobile.*

On suppose en outre que deux courbes (C), (C′) *glissent sur deux points fixes* P, P′ *et que la vitesse de glissement soit à chaque instant la même pour les deux courbes. Montrer que cette dernière condition suffit pour déterminer le lieu du centre instantané dans le plan fixe. Quel est ce lieu ? Quel est le mouvement pour lequel toutes ces conditions sont réalisées ?*

1° Appelons a et b les vitesses des points A et B; par hypothèse ces quantités sont constantes.

Soient maintenant à l'instant t, I le centre instantané de

rotation et ω la vitesse angulaire ; nous aurons

$$IA.\omega = a, \qquad IB.\omega = b,$$

d'où nous tirons

$$\frac{IA}{IB} = \frac{a}{b}.$$

Par conséquent, la roulante est la circonférence ((
diamètre A'B', A' et B' divisant le segment AB
port $\frac{a}{b}$.

2° Les vitesses de glissement des deux courb
expressions IP.ω et IP'.ω.

Pour qu'elles soient égales il faut que l'on ait

$$IP = IP'.$$

Par suite, la base est la perpendiculaire (D) à PP
son milieu.

Le mouvement pour lequel les deux conditions
sont remplies est réalisé par le roulement de la c
(C) sur la droite (D).

C'est un mouvement *cycloïdal*.

EXERCICES

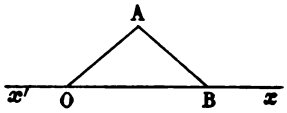
228. — Une circonférence roule intérieurement sur u
rayon double. Démontrer : 1° que tous les points de
décrivent des droites ; 2° que tous les autres points du
décrivent des ellipses.

229. — Les extrémités A et B d'un segment rectilign
deux droites concourantes Ox, Oy. Trouver la base et l

230. — Les côtés Ax, Ay d'un angle xAy de gran
tante glissent sur deux points fixes. Trouver la base et la

231. — Un angle xAx' se déplace dans son plan ; le côt
tangent à une circonférence C et le côté Ax' glisse su
fixe P. Trouver la base et la roulante.

232. — Deux tiges égales OA, AB sont articulées en A ; le point O est fixe et B est assujetti à décrire Ox.



On fait tourner OA autour de O dans le sens des aiguilles d'une montre avec la vitesse angulaire constante $\omega = 1$.

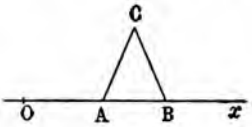
1° Trouver le mouvement du point B.

2° Construire le centre instantané I qui correspond au déplacement de AB.

3° Trouver les lieux du point I dans le plan fixe et dans le plan entraîné avec AB.

233. — On donne un quadrilatère, convexe ou non convexe, ABCD dans lequel on a $AB = CD$, $BC = DA$. Ce quadrilatère est articulé à ses sommets et le côté AD est fixe. On demande : 1° de trouver le centre instantané I qui correspond au déplacement du côté BC; 2° de construire les lieux de ce point I dans le plan fixe et dans le plan invariablement lié au côté BC.

234. — Deux tiges égales AC, CB sont articulées en C ; les extrémités A, B décrivent Ox suivant les lois



$$OA = t, \quad OB = \frac{1}{t}.$$

Trouver pour une position du système, les centres instantanés qui correspondent l'un au glissement du plan invariablement lié à AC, l'autre au glissement du plan invariablement lié à BC.

235. — Une circonférence roule sans glisser sur une droite Ox ; trouver le mouvement relatif du point O par rapport à un observateur entraîné avec la circonférence.

236. — Une droite roule sans glisser sur une circonférence ; trouver le mouvement relatif de la circonférence par rapport à un observateur entraîné avec la droite.

237. — Un triangle invariable ABC se déplace dans son plan. Quel est ce déplacement, sachant que les vitesses des trois sommets sont proportionnelles à trois nombres donnés α, β, γ ?

CHAPITRE V

MOUVEMENT DU SOLIDE. — COMPOSITI(TRANSLATIONS ET DES ROTATION

---

236. Mouvement de translation. — Le mouvement d'un s(*translation*, quand, à un instant donné, d'ailleurs quelconqu de tous ses points sont représentées par des segments équipc

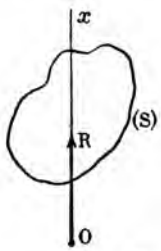
On convient de représenter la translation à une époque d segment (T) = (*v*) équipollent à la vitesse que possède cha(du solide à cet instant.

Il suit de là que le segment (T) peut être transporté paralli même n'importe où dans l'espace.

237. Composition des translations. — Si un solide est animé translations simultanées, en appliquant la règle de compositio on voit immédiatement que le mouvement résultant est un pour laquelle, à chaque instant, le segment représentatif ferm polygonal des segments représentatifs des translations compos

En particulier, si les translations composantes sont rectiligı lation résultante sera aussi rectiligne.

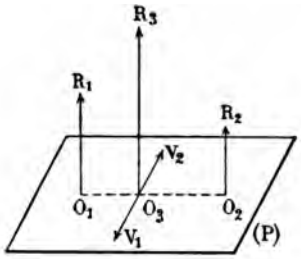
Remarque. — Lorsqu'un solide est animé d'un mouvement d à chaque instant, les accélérations de to du solide sont équipollentes ; ceci résult nition même de l'accélération.



238. Mouvement de rotation. — Soit u tournant autour de Ox ; si ω est la vites à un instant donné, on représente la ro instant par un segment $OR = \omega$ porté partir d'une origine O arbitraire dans ı qu'un observateur dirigé suivant ce segm les pieds en O, voie la rotation s'effect sens des aiguilles d'une montre.

Il suit de là que l'origine du segment (R) peut être transportée en un point quelconque de sa direction.

239. Composition des rotations. — *Les rotations se composent comme les forces.*



En effet, considérons d'abord le cas de deux rotations

$$O_1R_1 = \omega_1, \qquad O_2R_2 = \omega_2$$

parallèles et de même sens, nous allons démontrer qu'elles se composent en une rotation $O_3R_3 = \omega_1 + \omega_2$ parallèle et de même sens.

Soit O_3 défini sur O_1O_2 perpendiculaire aux axes R_1 et R_2, par la relation

$$\frac{O_3O_1}{R_2} = \frac{O_3O_2}{R_1} = \frac{O_1O_2}{R_1 + R_2},$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{O_3O_1}{\omega_2} = \frac{O_3O_2}{\omega_1} = \frac{O_1O_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Dans la rotation (R_1), O_3 a une vitesse $V_1 = O_1O_3.\omega_1$ et dans la rotation (R_2) une vitesse $V_2 = O_2O_3.\omega_2$. D'après les relations (1), $V_1 = V_2$; d'autre part V_1 et V_2 sont directement opposées comme étant perpendiculaires au plan (R_1, R_2) et d'après le sens des segments (R_1) et (R_2). Par conséquent O_3 a une vitesse résultante nulle, et il en est évidemment de même pour tous les points de la parallèle menée par O_3 aux axes R_1 et R_2.

Le mouvement résultant est donc une rotation parallèle aux rotations composantes. Soit Ω sa vitesse angulaire, nous aurons en considérant le point O_2 du solide d'abord dans les deux mouvements composants, et ensuite dans la rotation résultante et en égalant ses vitesses,

$$O_1O_2\ \omega_1 = O_3O_2.\Omega,$$

d'où

$$\Omega = \frac{O_1O_2}{O_3O_2} \cdot \omega_1,$$

ou bien, en vertu de (1),

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Nous voyons en outre, d'après le sens du déplacement de O_2, que la rotation résultante R_3 est de même sens que les rotations R_1 et R_2.

Même démonstration pour deux rotations *parallèles et de sens contraires*.

240. Arrivons au cas de deux rotations *concourantes*.

Soient les deux rotations $OR_1 = \omega_1$, $OR_2 = \omega_2$; nous allons démontrer que le mouvement infinitésimal résultant est une rotation représentée, en grandeur et direction, par la diagonale OB.

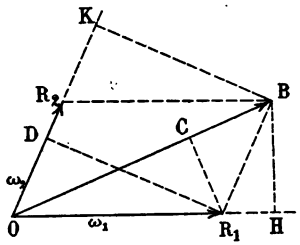
La vitesse résultante de O est nulle puisqu'il reste en repos dans les deux mouvements composants.

D'autre part, dans les rotations (R_1) et (R_2) les vitesses de B sont

$$V_1 = BH.\omega_1 = BH.OR_1 = \text{surf. } OR_1BR_2,$$
$$V_2 = BK.\omega_2 = BK.OR_2 = \text{surf. } OR_1BR_2,$$

donc

$$V_1 = V_2;$$



en outre, comme ces vitesses sont toutes deux perpendiculaires au plan de la figure et opposées, leur résultante est nulle.

Ceci prouve bien que tous les points de la droite OB ont une vitesse nulle c'est-à-dire que le mouvement résultant est une rotation autour de OB.

Soit Ω la vitesse angulaire de cette rotation et égalons les deux expressions de la vitesse du point R_1 du solide, considéré comme participant d'abord aux deux rotations composantes et ensuite à la rotation résultante, nous aurons

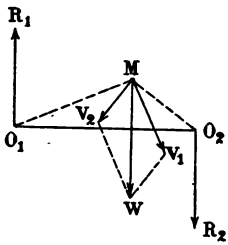
$$R_1D.\omega_2 = R_1C.\Omega,$$

d'où

$$\Omega = \frac{R_1D.OR_2}{R_1C} = \frac{\text{surf. } OR_1BR_2}{R_1C} = OB.$$

Enfin le sens du déplacement de R_1 achève de prouver que la rotation résultante est bien représentée par le segment OB.

241. *Couple de rotations.* — Soient les rotations (R_1), (R_2), égales, parallèles et de sens contraire, O_1O_2 le bras de levier du couple qu'elles forment.



Considérons un point M quelconque du plan O_1MO_2 mené par O_1O_2 perpendiculairement au plan du couple.

Sa vitesse résultante sera la diagonale MW du parallélogramme construit avec les vitesses composantes MV_1, MV_2.

Or, nous avons

$$MV_1 = O_1M.\omega, \qquad MV_2 = O_2M.\omega,$$

d'où

$$\frac{MV_1}{MO_1} = \frac{WV_1}{MO_2} = \omega.$$

Il résulte de là que les deux triangles O_1MO_2, MV_1W sont semblables, car $\widehat{MV_1W} = \widehat{O_1MO_2}$; par conséquent, MW est perpendiculaire à O_1O_2 et $MW = O_1O_2.\omega$.

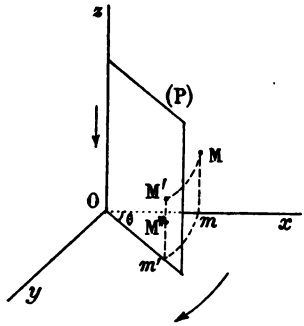
En résumé, tous les points du solide ont des vitesses équipollentes à (MW), et nous voyons que *tout couple de rotations est équivalent à une translation de grandeur égale au moment du couple, dirigée perpendiculairement au plan du couple, dans le sens du déplacement d'un point quelconque* O_1 *des axes.*

Remarque. — Si un solide est animé de plusieurs translations et rotations

simultanées, on pourra, après avoir remplacé les translations par des couples de rotations, réduire les rotations en effectuant les mêmes constructions que dans le cas des forces appliquées à un solide.

242. *On donne dans un plan* (P) *une droite* (D). *On suppose ce plan animé de deux mouvements simultanés : le premier est une rotation uniforme autour de* (D); *le second, une translation uniforme parallèle à* D. *Étudier le mouvement résultant d'un point quelconque du plan* (P).

Adoptons trois axes rectangulaires (O, xyz) l'axe Oz coïncidant avec la droite (D).



Supposons qu'à l'origine des temps le plan (P) coïncide avec le plan xOz et considérons le point de ce plan, qui, à cet instant, est défini par $Om = a$, $mM = h$. Au bout du temps t, le plan aura tourné de l'angle $\theta = \omega t$ autour de Oz et en même temps il aura glissé le long de cette droite de la quantité kt, k étant la vitesse de translation; par suite, au temps t, le point M du plan aura pour coordonnées

$$x = a \cos \omega t, \qquad y = a \sin \omega t, \qquad z = h - kt.$$

Le point M qui reste constamment sur le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon a décrit une *hélice*.

En effet, on a

$$\text{abscisse curviligne} = a\theta = a\omega t,$$
$$\text{ordonnée} = z = h - kt;$$

l'abscisse curviligne est donc proportionnelle à l'ordonnée et cette propriété peut servir de définition à l'hélice circulaire.

Étudions maintenant le mouvement du point M sur sa trajectoire. Sa vitesse étant V, nous avons

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2;$$

mais

$$V_x = -a\omega \sin \omega t, \qquad V_y = a\omega \cos \omega t, \qquad V_z = -k,$$

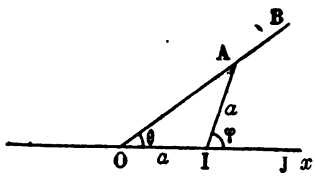
et il vient

$$V^2 = a^2\omega^2 + k^2 = \text{const.}$$

Par conséquent, le mouvement du point M est uniforme. Le mouvement du plan (P) est dit *hélicoïdal.*

243. *On donne dans un plan deux tiges* IA, OAB; *cette dernière passe dans un anneau* A *fixé à l'extrémité de* IA, *et toutes deux peuvent pivoter autour de leurs extrémités respectives* I *et* O, *qui sont fixes. Sachant que* IO = IA = a *et que* OB *tourne avec la vitesse angulaire constante* ω, *on demande* : 1° *le mouvement de* IA; 2° *le mouvement relatif de* OB *par rapport à* IA.

1° Soient θ et φ les angles de OB et de IA avec Ox.



La vitesse angulaire de OB est la dérivée de θ par rapport au temps; nous avons donc

$$\theta' = \omega.$$

Mais $\qquad \varphi = 2\theta,$

et il vient en prenant les dérivées,

$$\varphi' = 2\theta' = 2\omega.$$

Par suite, IA tourne autour de I dans le même sens que OB avec la vitesse angulaire 2ω.

2° Pour avoir le mouvement relatif de OB par rapport à IA, il faut composer les deux rotations (-2ω), (ω) perpendiculaires en I et O au plan de la figure et de sens contraire. On obtient ainsi d'après (239) la rotation $(-\omega)$ perpendiculaire en J tel que OJ = 2OI au plan de la figure.

Donc, pour un observateur entraîné avec IA, la tige OB paraît tourner autour de J avec la vitesse angulaire ω, mais en sens contraire de la rotation de OB.

Pour préciser, soit (P) le plan invariablement lié à OB et (P') le plan invariablement lié à IA. Le lieu du point J dans le

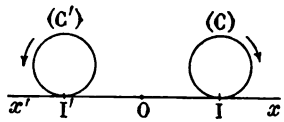
plan (P) ou *roulante* est la circonférence de centre O et de rayon $OJ = 2a$; d'autre part, le lieu du point J dans le plan (P′) ou *base* est la circonférence de centre I et de rayon $IJ = a$.

Le glissement du plan (P) sur le plan (P′) sera donc réalisé en faisant rouler intérieurement une circonférence sur une autre de rayon moitié.

244. *On donne une droite xx', deux circonférences* C, C′ *égales, tangentes entre elles et à la droite.*

On suppose qu'elles s'éloignent en roulant uniformément et avec la même vitesse sur xx', et l'on demande d'étudier le mouvement relatif de la circonférence C′ *par rapport à la circonférence* C.

Si (C) et (C′) sont les positions des deux circonférences à un certain instant, en vertu de l'hypothèse, le milieu O de II′ est un point fixe sur xx'.



Le mouvement infinitésimal des circonférences est une rotation autour du point de contact. La rotation (R) de (C) sera représentée par un segment de longueur ω porté sur la perpendiculaire en I au plan de la figure dans un sens convenable. La rotation (R′) de (C′) sera pareillement représentée par un segment, de même longueur ω, porté sur la perpendiculaire en I′ au plan de la figure, mais en sens contraire du précédent. En résumé, les rotations (R), (R′) sont égales, parallèles et de sens contraire. Par suite, le mouvement relatif de (C′) par rapport à (C) résultera de la composition des deux rotations (— R), (R′), égales, parallèles et de même sens et, d'après ce que nous avons vu (239), ce sera une rotation perpendiculaire au plan de la figure au milieu O de II′.

En d'autres termes, O est le centre instantané, dans le glissement du plan (P′), invariablement lié à (C′), sur le plan (P), invariablement lié à (C).

Cherchons la *base*, c'est-à-dire le lieu du point O dans le plan (P). Le point O étant en repos absolu, sa vitesse relative par

rapport à (C) est perpendiculaire à OI ; par conséquent, la trajectoire relative de O ayant ses normales tangentes à (C) est *une développante de cercle.*

La base est donc une développante de cercle et il en est de même de la *roulante*, comme on le reconnaît par un raisonnement identique au précédent. On peut d'ailleurs ajouter que ces deux courbes sont égales, car les développantes d'un même cercle, ou de cercles égaux, sont des courbes égales.

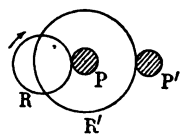
EXERCICES

238. — Mouvement de la bielle d'accouplement (*).

239. — Etant donné dans un solide des points O, P_1, P_2, ..., P_n, on joint OP_1, OP_2, ... et on considère les rotations simultanées représentées par les segments $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$, ..., $\overline{OP_n}$. Déterminer la rotation résultante.

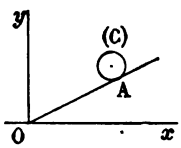
240. — Une sphère tourne autour d'un diamètre D et glisse en même temps le long de cette droite. Trouver à un instant donné le lieu des points de la surface de la sphère qui ont une vitesse donnée.

241. — Dans un engrenage conique, trouver le mouvement relatif de l'une des roues par rapport à l'autre (*).



242. — Dans l'équipage ci-contre, quel est le mouvement relatif du pignon P' par rapport à la roue R (*)?

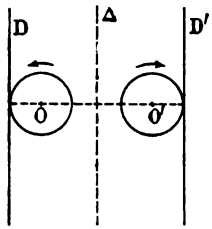
243. — Un cylindre de révolution tourne autour de son axe AA', avec une vitesse angulaire constante ω, pendant qu'un mobile M parcourt AA' d'un mouvement uniforme; trouver le mouvement apparent d'un point du cylindre par rapport au point M.



244. — On donne dans un plan une droite OA tournant uniformément avec la vitesse angu-

(*) Voir au besoin, pour ces mécanismes, le chapitre suivant.

laire ω autour de O, pendant que la circonférence (C) roule sans glisser sur OA, avec la vitesse constante v_0. Quelle relation doit-il exister entre ω et v_0, pour que le mouvement résultant du cercle se réduise à une translation?



245. — On donne deux droites parallèles D, D'; deux circonférences O, O' égales, roulent sans glisser sur D et D', de façon à rester symétriques par rapport à Δ.

On demande : 1° le mouvement relatif de la circonférence O' par rapport à la circonférence O; 2° de construire la base et la roulante dans le glissement du plan invariablement lié à O' sur le plan invariablement lié à O.

CHAPITRE VI

TRANSFORMATION ET TRANSMISSION DE MOUVEMENTS. SYSTÈMES ARTICULÉS. MÉCANISMES

245. Les mouvements les plus simples qu'on emploie dans l'industrie sont au nombre de quatre :

1. Le mouvement *rectiligne continu* : R.C.
2. Le mouvement *rectiligne alternatif* : R.A.
3. Le mouvement *circulaire continu* : C.C.
4. Le mouvement *circulaire alternatif* : C.A.

Si l'on se propose de transformer ces mouvements, on a seize problèmes à résoudre comme l'indique le tableau suivant :

	R.C.	R.A.	C.C.	C.A.
R.C.				
R.A.				
C.C.				
C.A.				

Mais dans la pratique on ne considère que les transformations qui suivent :

R.C. en R.C. — Poulies.
R.C. en C.C. — Moulins à eau et à vent, horloges à poids.

C.C. en R.C. — Crémaillère, treuils, vis.
C.C. en R.A. — Bielle-manivelle, excentriques, cames.
C.C. en C.A. — Balancier-bielle-manivelle.
C.C. en C.C. — Bielles d'accouplement, courroies et chaînes de transmission. Engrenages cylindriques, engrenages coniques. Joints.
C.A. en R.A. — Balancier, parallélogramme de Watt, losange de Peaucellier.
C.A. en C.C. — Balancier-bielle-manivelle, rouet des fileuses, pédale du rémouleur.

C'est ainsi que Monge classa les divers mécanismes, d'après les transformations qu'ils permettent d'effectuer.

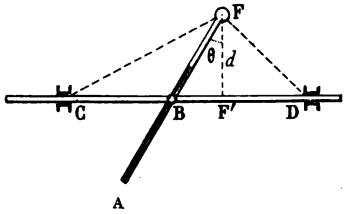
La classification de Willis est plus usitée. Cette dernière est basée sur la considération du rapport et du sens des vitesses transmises ; elle est subdivisée en trois genres, suivant que la transmission du mouvement a lieu :

1° *Par contact* : roues de friction, engrenages.
2° *Par lien rigide* : bielles, excentriques.
3° *Par lien flexible* : courroies, chaînes.

Les *mécanismes* font partie des *machines*. Ils relient le *récepteur* où se manifeste la force motrice à l'*opérateur*, ou l'*outil*, qui exécute l'ouvrage.

246. *Une tige* CD, *maintenue par des guides, est animée d'un mouvement rectiligne alternatif; elle porte un bouton* B. *Une autre tige* FA, *mobile autour du point fixe* F, *porte une rainure dans laquelle s'engage le bouton* B. *On demande : 1° la loi du mouvement du point* A *lorsque* CD *a un mouvement uniforme alternatif; 2° quelle serait la loi de l'espace de* CD, *si le mouvement de* A *était uniforme ?*

1° Soit F′ la projection de F sur la direction CD et posons $\widehat{AFF'} = \theta$.



Le mouvement de CD étant supposé uniforme, nous aurons en prenant F′ comme origine des espaces et choisissant convenablement l'origine des temps,

$$F'B = v_0 t;$$

or le triangle BFF′ nous donne

$$BF' = d \operatorname{tg} \theta = v_0 t,$$

de sorte qu'il vient pour la loi des variations de θ,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0}{d}\,t,$$

ou bien

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{d}\,t.$$

Posons $FA = a$, l'espace e que décrit le point A est $a\theta$, ou bien

$$e = a \operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{d}\,t.$$

2° Si le point A a un mouvement uniforme, la vitesse angulaire de FA est constante; soit ω sa valeur; nous aurons alors

$$\theta = \omega t,$$

d'où

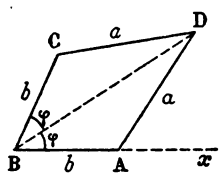
$$BF' = d \operatorname{tg}\omega t.$$

Telle est la loi de l'espace pour le mouvement de CD.

247. — *On donne un quadrilatère articulé* ABCD *dans lequel* $AD = CD = a$, $AB = CB = b$, $(a > b)$. *On fixe le côté* AB, *de sorte que les côtés* AD, BC *se comportent comme des manivelles reliées par la bielle* CD.

Démontrer qu'à un tour complet de AD *correspondent deux tours de* BC.

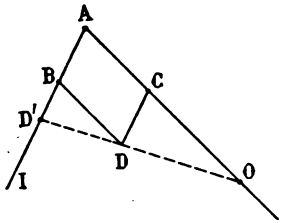
En vertu de l'hypothèse $a > b$, le point B est intérieur à la circonférence lieu de D.



Par conséquent, lorsque l'angle DAx augmente de 360°, il en est de même pour l'angle $DBx = \varphi$; l'angle $CBx = 2\varphi$ augmente alors de $2 \times 360°$. En résumé, quand la manivelle AD fait un tour, la manivelle BC en fait deux.

248. Pantographe. — Cet appareil se compose de deux tiges IA, OA, articulées en A.

Ces tiges sont reliées par deux autres BD, CD, articulées en B, D, C et formant un parallélogramme ABDC.



En D et D' sont deux pointes, l'une sèche, l'autre traçante et au point O se trouve un axe de rotation autour duquel la tige AO est assujettie à tourner.

Pour se servir du pantographe on pique l'axe O sur la planche à dessin et on suit avec la pointe sèche les contours du dessin, le crayon D' décrit un dessin homothétique.

En effet, les triangles OCD, OAD' étant semblables, on a

$$\frac{OD'}{OD} = \frac{OA}{OC} = \text{const.}$$

Le pantographe est utilisé pour amplifier les figures, cartes géographiques, photographies, etc. Les tiges IA, OA sont convenablement graduées et en déplaçant les charnières B et C, on peut reproduire une figure à une échelle donnée.

249. *Deux arbres parallèles* O, O' *à la distance* $OO' = 3a$, *portant deux manivelles* OA, O'A' *égales à a sont reliés par une bielle* $AA' = 3a$. *Sachant que les deux arbres tournent en sens inverse, on demande :* **1°** *de montrer que la vitesse angulaire de la bielle est égale à la différence des vitesses angulaires des deux manivelles ;* **2°** *de déterminer les positions qu'occupent les manivelles au moment où la bielle est inclinée d'un angle donné sur* OO' ; 3° *de trouver la plus grande inclinaison de la bielle.*

1° Les triangles OAA', OA'O' étant égaux, la figure OA'O'A est un trapèze isocèle, et nous avons

$$\beta = \alpha + \theta.$$

Ces trois angles étant fonctions du temps, nous aurons en prenant les dérivées

$$\beta' = \alpha' + \theta',$$

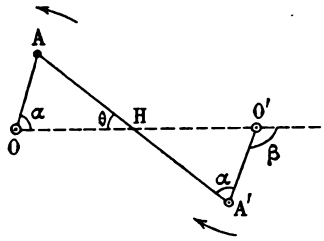
d'où

$$\theta' = \alpha' - \beta'.$$

Or α', β' sont les vitesses angulaires des deux manivelles, et $|\theta'|$ représente bien la valeur absolue de la vitesse angulaire de la bielle.

2° Soit θ l'inclinaison donnée de la bielle sur OO'; dans le triangle OHA, nous avons

$$\widehat{OAH} = \pi - \beta, \qquad OH + AH = OH + HO' = 3a;$$



par conséquent, nous aurons

$$\frac{\sin\theta}{a} = \frac{\sin\alpha}{AH} = \frac{\sin\beta}{OH}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{3a},$$

d'où

$$(1) \quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 3\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \text{car} \qquad \beta - \alpha = \theta.$$

Ces relations nous donneront α et β.

Pour que (1) soit possible il faut $3\sin\frac{\theta}{2} < 1$, c'est-à-dire

$$(2) \qquad \sin\frac{\theta}{2} < \frac{1}{3}.$$

Cette inégalité étant vérifiée, en appelant γ le plus petit arc positif ayant pour sinus $3\sin\frac{\theta}{2}$, nous aurons comme solutions de (1)

$$\alpha + \beta = 2\gamma, \qquad \alpha + \beta = 2\pi - 2\gamma.$$

Enfin, si nous adjoignons $\beta - \alpha = \theta$ à chacune des relations précédentes, nous obtiendrons les deux systèmes de solutions

$$\begin{cases} \alpha' = \gamma - \frac{\theta}{2}, \\ \beta' = \gamma + \frac{\theta}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha'' = \pi - \gamma - \frac{\theta}{2}, \\ \beta'' = \pi - \gamma + \frac{\theta}{2}. \end{cases}$$

Ces valeurs sont admissibles, car $\gamma > \frac{\theta}{2}$ et l'on a bien

$$\alpha' > 0, \qquad \alpha'' > 0.$$

Comme nous avons, d'ailleurs,

$$\alpha'' = \pi - \beta', \qquad \beta'' = \pi - \alpha',$$

les deux positions de la bielle ainsi trouvées sont symétriques par rapport au milieu de OO'.

3° Nous avons trouvé plus haut, comme condition de possibilité,

$$\sin\frac{\theta}{2} < \frac{1}{3};$$

par suite, θ a pour maximum $2 \arcsin \frac{1}{3}$.

250. *Dans un engrenage cylindrique extérieur, les axes des deux roues sont distants de* $0^m,50$; *calculer les rayons de ces roues sachant que l'une a* 20 *dents et l'autre* 60.

Soient R, R' les rayons des deux roues, n, n' les nombres de dents. La formule

$$\frac{R}{R'} = \frac{n}{n'}$$

nous donne

$$\frac{R}{R'} = \frac{60}{20} = 3,$$

d'où

$$\frac{R}{3} = \frac{R'}{1} = \frac{R + R'}{4} = \frac{0,5}{4},$$

et finalement

$$R = \frac{3 \times 0,5}{4} = 0^m,375, \qquad R' = \frac{0,5}{4} = 0^m,125.$$

251. *Une roue dentée de rayon* $0^m,125$ *a* 20 *dents, calculer le pas.*

Le pas de cette roue étant la vingtième partie de sa circonférence, nous aurons

$$p = \frac{2\pi \times 0^m,125}{20} = 0^m,039.$$

252. *Dans un engrenage cylindrique extérieur, les roues ont* 48 *et* 18 *dents, l'épaisseur des dents est de* 16^{mm} *et le jeu est le dixième de cette épaisseur. Calculer :* 1° *les rayons des deux roues ;* 2° *le nombre de tours que fait le pignon quand la roue en fait* 30.

1° Soient R, R′ les rayons de la roue et du pignon, e l'épaisseur des dents, p le pas, j le jeu ; nous avons

$$p = 2e + j = 2e + \frac{e}{10} = \frac{21}{10}e = \frac{21}{10} \cdot 16 = 33^{mm},6.$$

Nous avons en outre

$$2\pi R = p \times 48, \qquad 2\pi R' = p \times 18,$$

d'où

$$R = \frac{33,6 \times 48}{2\pi} = 257^{mm},$$

$$R' = \frac{33,6 \times 18}{2\pi} = 96^{mm}.$$

2° Les nombres de tours étant inversement proportionnels aux rayons ou aux nombres de dents, nous aurons

$$\frac{x}{30} = \frac{48}{18},$$

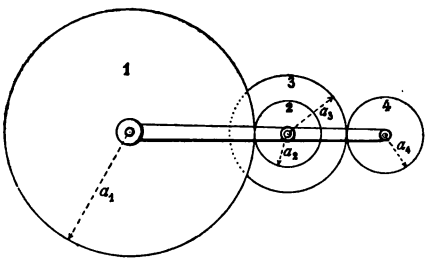
d'où

$$x = 80.$$

Le pignon fait donc 80 tours quand la roue en fait 30.

253. *Raison d'un train d'engrenages.*

Soit l'équipage formé des roues dentées 1, 3, 4 et du pignon 2, et appelons ω_1, $\omega_2 = \omega_3$, ω_4 leurs vitesses angulaires, enfin a_1, a_2, a_3, a_4 leurs rayons.



Les transmissions (1, 2) et (3, 4) nous donnent

$$a_1\omega_1 = a_2\omega_2,$$

$$a_3\omega_2 = a_4\omega_4,$$

d'où, en éliminant ω_2,

$$\frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4}.$$

Le rapport $\frac{\omega_4}{\omega_1}$ des vitesses angulaires de la roue *menée* et de la roue *menante* s'appelle *raison* de l'équipage.

Cette raison est positive ou négative suivant que les roues extrêmes tournent dans le même sens ou en sens contraire.

Quant aux rapports $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{a_3}{a_4}$, ils sont respectivement égaux à ceux des nombres de dents des roues des couples (1, 2), (3, 4) de transmission.

254. *Établir un train d'engrenage de raison* $\rho = 16$, *et comportant quatre axes.*

Nous avons, en appliquant la formule

$$\rho = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \frac{a_5}{a_6},$$

à résoudre en nombres entiers l'équation

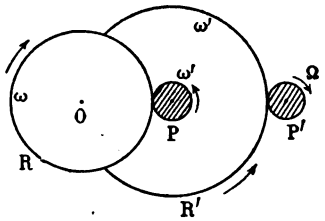
$$(1) \qquad \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \frac{a_5}{a_6} = 16.$$

On peut évidemment trouver une infinité de solutions entières $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, mais il est à remarquer que les rayons des pignons sont plus petits que ceux des roues qui les portent; de plus la pratique enseigne que le nombre des dents d'une roue dentée doit être compris entre certaines limites pour que l'équipage soit réalisable, de sorte qu'il n'y a qu'un petit nombre de solutions de (1) qui sont pratiquement acceptables.

On vérifiera cette équation en prenant

$$a_1 = 32, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = 15, \quad a_4 = 6, \quad a_5 = 24, \quad a_6 = 12.$$

255. *Une roue de 45 dents engrène avec un pignon de 6 dents; ce pignon appartient à une roue de 48 dents qui conduit elle-même un pignon de 6 dents. Connaissant la vitesse angulaire* ω *de la première roue, calculer celle du dernier pignon.*



Nous avons, en appelant Ω la vitesse angulaire du dernier pignon et ω' la vitesse angu-

laire de la roue et du pignon intermédiaires,

$$\omega \times 45 = \omega' \times 6, \qquad \omega' \times 48 = \Omega \times 6;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$45 \times 48 \times \omega = 6 \times 6 \times \Omega,$$

égalité qui nous donne

$$\Omega = \frac{45 \times 48}{6 \times 6}\,\omega = 60\omega.$$

256. *Étant donné le rapport* 270 *des vitesses de deux axes parallèles, déterminer le nombre des axes intermédiaires et des dimensions à donner aux roues pour transmettre le mouvement d'un axe à l'autre.*

Deux roues et deux pignons suffisent, comme nous allons le montrer. Nous avons, en effet, avec cette hypothèse

$$\frac{N \times N'}{n \times n'} = \frac{R \times R'}{r \times r'} = 270 = 2 \times 5 \times 3 \times 9 = (2 \times 9)(3 \times 5).$$

Nous prendrons

$$\frac{R}{r} = 18, \qquad \frac{R'}{r'} = 15,$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$\frac{R}{r} = \frac{18}{1} \times \frac{6}{6} = \frac{108}{6},$$

$$\frac{R'}{r'} = \frac{15}{1} \times \frac{8}{8} = \frac{120}{8};$$

d'où $\quad R = 108, \quad R' = 120, \quad r = 6, \quad r' = 8.$

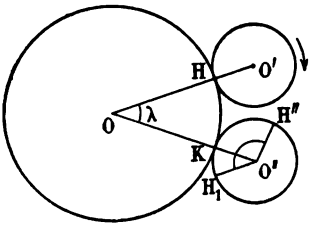
Nous voyons d'après cette solution même, que ce problème est susceptible d'un grand nombre de solutions.

257. *Une circonférence* O′ *de rayon* a' *roule sans glisser sur une circonférence* O *de rayon* a. *Calculer pour une rotation* λ *de* OO′, *la rotation* ω *de* O′ *autour de son centre.*

Quand la circonférence O′ est arrivée dans la position O″, le

point H est venu en H″ tel que arc KH″ = arc KH, et la rotation de O′ autour de son centre est mesurée par l'angle $H_1O''H''$, $O''H_1$ étant parallèle à O′H et de même sens.

Or nous avons



$$(1)\quad \widehat{H_1O''H''} = \widehat{H_1O''K} + \widehat{KO''H''}.$$

Mais $\widehat{H_1O''K} = \widehat{O''OH} = \lambda$,

et $\dfrac{\widehat{KO''H''}}{\lambda} = \dfrac{a}{a'}$, puisque les arcs KH et KH″ sont égaux; nous obtiendrons donc en substituant dans (1),

$$\omega = \lambda\left(1 + \frac{a}{a'}\right).$$

Si la circonférence O′ roulait à l'intérieur de O on trouverait sans plus de difficulté

$$\omega = \lambda\left(1 - \frac{a}{a'}\right).$$

Remarque. — Si O et O′ sont deux roues dentées, la première fixe et la seconde réunie à celle-ci par un lien OO′, on a le *mécanisme épicycle.*

Le rapport $|\rho| = \dfrac{a}{a'}$ des rayons ou des nombres de dents est la *raison* de l'engrenage; on regarde ρ comme positif, lorsque l'engrenage est intérieur et les rotations de même sens, et comme négatif dans le cas contraire. Avec cette hypothèse, les résultats précédents sont contenus dans l'unique formule

$$\omega = \lambda(1 - \rho).$$

258. *Une came ou excentrique, qui tourne uniformément à raison de n tours par minute, doit communiquer à une tige guidée, située dans le même plan et passant par l'axe de rotation, un mouvement uniforme de va-et-vient d'amplitude l, tel qu'à chacune des extrémités de sa course, la tige reste au repos pendant t secondes. Les deux galets du cadre auquel est fixée la tige guidée sont dis-*

tants l'un de l'autre de la quantité e. On sait que le profil de cet excentrique est composé de deux spirales d'Archimède dans la partie correspondante au mouvement de la tige guidée. On demande :

1° *Par quelles courbes le profil doit être complété ;*

2° *Quelles sont les dimensions de ces courbes ;*

3° *Quel angle sous-tendra chaque arc de spirale, et de combien devra varier le rayon de cet arc à chaque degré d'angle.*

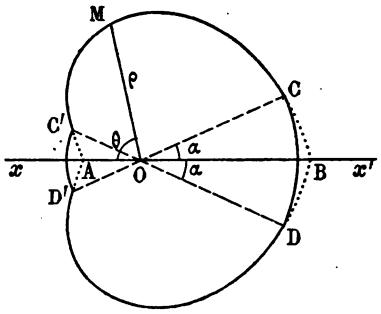
Appliquer les formules au cas où $e = 0^m,18$, $l = 0^m,07$, $n = 24$, $t = 0^s,5$.

L'épaisseur des galets est supposée nulle.

4° *Faire l'épure de l'excentrique et la représentation graphique de la loi du mouvement de la tige.*

(*Conc. acad., Aix, 1874.*)

1° et 2° Soit xx' la direction de la tige guidée. Si la tige n'avait pas de repos aux points morts, le contour de la came serait formé de deux arcs de spirale d'Archimède symétriques par rapport à xx'. L'équation de cette courbe est de la forme



$$(1) \qquad \rho = a\theta + b.$$

Calculons les constantes a et b en fonction des données. Si nous faisons successivement dans (1), $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, nous obtenons

$$OA = b, \qquad OB = a\pi + b;$$

mais

$$OA + OB = e, \qquad OB - OA = l,$$

de sorte qu'il vient

$$a\pi + 2b = e, \qquad a\pi = l,$$

d'où

$$a = \frac{l}{\pi}, \qquad b = \frac{e - l}{2}.$$

La spirale a donc pour équation

$$(2) \qquad \rho = \frac{l}{\pi}\theta + \frac{e-l}{2}.$$

Ceci posé, pour que la tige reste en repos pendant t secondes aux points morts, il faut évidemment substituer à la périphérie, dans le voisinage de A et de B, deux arcs de circonférence CD, C'D' de centre O. Leurs rayons doivent vérifier la relation

$$OC + OD' = OA + OB = e.$$

Calculons leur ouverture commune 2α. Pour cela, si ω est la vitesse de rotation de la came, l'arc CD devant être parcouru pendant le temps t, nous avons

$$2\alpha = \omega t;$$

mais

$$\omega = \frac{2n\pi}{60} = \frac{n\pi}{30},$$

et

$$2\alpha = \frac{n\pi t}{30}.$$

Le rayon OC' s'obtiendra en faisant $\theta = \alpha = \frac{n\pi t}{60}$ dans (2); nous avons ainsi

$$OC' = \frac{nlt}{60} + \frac{e-l}{2},$$

et il viendra en outre,

$$OC = e - OC' = \frac{e+l}{2} - \frac{nlt}{60}.$$

3° Exprimons 2α en degrés; nous aurons

$$2\alpha = \frac{\pi x}{180},$$

d'où

$$x = \frac{180 \times 2\alpha}{\pi} = 6nt \text{ degrés.}$$

Par suite, l'arc de spirale C'OC sera sous-tendu par l'angle

$$180^\circ - 6nt^\circ.$$

Enfin, cherchons de combien devra varier le rayon de cet arc à chaque degré d'angle.

Quand l'ouverture de l'arc θ augmente de 1°, θ augmente de $\frac{\pi}{180}$, et la formule (2) nous montre que ρ augmente de $\frac{l}{180}$.

Application. — $e = 0^m,18$, $l = 0^m,07$, $n = 24$, $t = 0^s,5$.

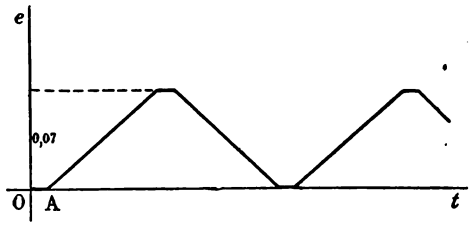
Nous obtenons dans ce cas particulier pour équation de la spirale

$$\rho = \frac{0,07}{\pi}\theta + 0,055,$$

puis

$$2\alpha = \frac{2}{5}\pi, \qquad x = 72°.$$

L'arc de spirale est sous-tendu par l'angle de 108°.

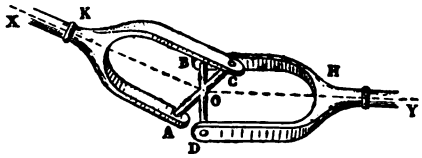


Le rayon de la spirale augmente de $\frac{7}{18000}$ quand l'arc augmente de 1°.

4° L'épure de l'excentrique se fait alors sans difficulté et nous avons pour le mouvement de la tige le diagramme ci-dessus.

259. Joint de Cardan. — *Le joint universel de Cardan* est utilisé pour transformer une rotation autour de OX en une rotation autour de OY, l'angle XOY étant compris entre 135° et 180°.

L'arbre OX est terminé par une fourchette AKC dont les extrémités sont traversées par l'une des branches AC d'un *croisillon*, dont l'autre branche BD, perpendiculaire à la première, lui est invariablement liée en O. Le second arbre OY est pareillement terminé par une fourchette BHD qui s'articule de la même façon avec



le croisillon. La théorie de ce mécanisme consiste surtout dans le calcul du rapport des vitesses angulaires des arbres OX et OY.

Supposons qu'on effectue une rotation autour de OX ; on voit sans difficulté qu'on pourra passer d'une position du croisillon à une autre, en le faisant participer à cette rotation et en lui imprimant une seconde rotation autour de AC.

Par suite, le déplacement infinitésimal du croisillon est une rotation qui résulte de la composition des deux précédentes.

En vertu de la transmission du mouvement, cette rotation devra pouvoir se décomposer en deux autres, l'une autour de BD, la seconde autour de l'axe OY.

En résumé, si ω_1, ω'_1, ω_2, ω'_2, sont les valeurs algébriques des rotations autour des directions $\overline{OX}$, $\overline{OA}$, $\overline{OY}$, $\overline{OB}$, nous aurons, en projetant sur un axe quelconque,

$$(\omega_1) + (\omega'_1) = (\omega_2) + (\omega'_2).$$

Or, projetons sur $\overline{OX}$ et sur $\overline{OB}$, nous aurons, après avoir posé $\varphi = 180^0 - \widehat{XOY}$,

$$\omega_1 = -\omega_2 \cos\varphi + \omega'_2 \cos\widehat{BOX},$$

$$\omega_1 \cos\widehat{BOX} = \omega'_2;$$

d'où, en éliminant ω'_2,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{\cos\varphi}{\sin^2\widehat{BOX}}.$$

Tel est le rapport que nous nous étions proposé de calculer.

La direction $\overline{OB}$ balayant le plan perpendiculaire à OY en O, nous obtenons le tableau suivant pour la variation de $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, quand l'arbre OX fait un tour complet :

$\widehat{BOX}$	$90^0 - \varphi$	90^0	$90^0 + \varphi$	90^0	$90^0 - \varphi$
$-\frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\frac{1}{\cos\varphi}$	$\cos\varphi$	$\frac{1}{\cos\varphi}$	$\cos\varphi$	$\frac{1}{\cos\varphi}$

Le rapport des vitesses angulaires des deux arbres oscille donc entre $\cos\varphi$ et $\frac{1}{\cos\varphi}$.

EXERCICES

246. — Deux manivelles égales AC, BD sont reliées par une bielle CD, dont la longueur est égale à la distance AB des axes. Trouver le mouvement d'un point quelconque de la bielle.

247. — Dans le dispositif bielle-manivelle, la manivelle OA tourne uniformément, la bielle AB = 4.OA. 1° Exprimer en fonction du temps la distance OB; 2° représenter par une courbe la loi des espaces du coulisseau.

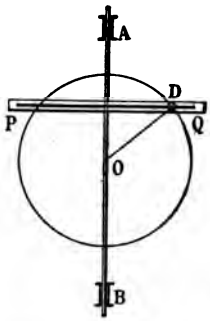
248. — Dans le mécanisme bielle-manivelle, on suppose que la vitesse angulaire de la manivelle est constante et égale à ω. Trouver la vitesse du coulisseau au moment où la bielle est perpendiculaire à la manivelle.

249. — Dans le pantographe, connaissant la normale à la trajectoire de la pointe sèche, construire la normale à la trajectoire d'un sommet quelconque du parallélogramme, et déterminer les points où les côtés de ce parallélogramme touchent les courbes qu'ils enveloppent.

250. — On considère un inverseur de Peaucellier, destiné à transformer un mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif. Trouver, pour une position donnée du losange, les points où ses côtés touchent leurs enveloppes.

251. — Dans un inverseur de Peaucellier, les côtés du losange ABCD égalent $0^m,30$, les bras égaux OC, OA valent $0^m,50$. Sachant que le point D se déplace sur une circonférence de rayon $0^m,20$ et passant par O, trouver l'amplitude de la course du sommet B opposé à D.

252. — Une tige verticale AB glissant entre deux guides est adaptée perpendiculairement à une pièce PQ, présentant une coulisse rectiligne où s'engage un coulisseau D. Celui-ci est porté par l'extrémité d'une manivelle OD, tournant autour d'un axe horizontal O de la direction AB. On demande :



1° La longueur minima que doit avoir PQ pour que la manivelle puisse se mouvoir d'une manière continue ;

2° L'amplitude du mouvement de va-et-vient de AB ;

3° Les courbes représentatives des espaces, des vitesses et des accélérations dans ce mouvement, le mouvement de la manivelle étant supposé uniforme.

(*Conc. acad., Toulouse, 1874.*)

253. — Pour communiquer à une pièce M un mouvement rectiligne alternatif de A en A', on emploie un excentrique circulaire tournant autour d'un axe projeté en O sur le prolongement de AA'. Trouver quelle longueur aura la bielle. Construire la position du centre du chariot de l'excentrique pour une position donnée de la pièce M, et déterminer à cet instant la vitesse de cette dernière.

On prendra pour données la distance d du point O au milieu C de AA', la demi-course a de M, le rayon r du chariot et le nombre de tours n qu'effectue l'arbre O par minute.

(*Conc. acad., Aix, 1876.*)

254. — Etant donné un disque tournant uniformément autour d'un axe horizontal, on propose d'établir sur son contour une dent ou came, qui élève d'un mouvement uniforme un mentonnet A fixé à une tige guidée, pouvant se mouvoir verticalement. La distance OB de l'axe de rotation à cette droite verticale est de $0^m,12$; le mentonnet, qu'on suppose saisi par la came au point B, doit être élevé de $0^m,30$. Pendant quelle fraction de la révolution de l'arbre, la came agira-t-elle sur le mentonnet ?

(*Conc. acad., Nancy, 1874.*)

255. — Dans l'excentrique circulaire à cadre, le cadre a un mouvement de translation uniforme ; étudier le mouvement du disque circulaire.

256. — Les deux roues d'un engrenage cylindrique ont n et n' dents d'épaisseur e; le jeu est représenté par j. Calculer les rayons des deux roues et la distance des axes.

257. — Trouver dans l'engrenage à crémaillère, la relation qui existe entre la vitesse angulaire du pignon et la vitesse de la crémaillère.

258. — Une roue de 120 dents a une vitesse angulaire $\omega = 1$; elle engrène avec un pignon de 12 dents ; sur l'axe de ce dernier est calée une roue de 120 dents, qui commande un pignon de 16 dents.

Calculer le nombre de tours que fait ce dernier pignon pendant une minute.

259. — Etant donné le rapport 269 des vitesses de deux axes, déterminer le nombre des axes intermédiaires et les dimensions à donner aux roues, pour transmettre le mouvement d'un axe à l'autre.

260. — Deux roues d'engrenage cylindrique ont 15 et 25 dents; l'épaisseur des dents est de 15^{mm}; calculer le jeu, sachant que le rapport des rayons est $\frac{5}{3}$.

261. — Entre deux arbres concourants, faisant entre eux un angle de 60°, on veut établir deux roues d'engrenage conique telles, que l'une fasse un tour pendant que l'autre en fait deux. Calculer les angles des cônes primitifs et le rapport des nombres de dents des deux roues.

262. — Etablir un train d'engrenages comportant trois axes et dont la raison soit $\frac{1}{60}$.

263. — Dans le mécanisme *épicycle*, la roue fixe est O, la roulante est O'.

Les rayons de ces roues étant R, R' et le lien OO' ayant pour longueur a, on demande de calculer le nombre de dents de chacune des roues.

DYNAMIQUE

CHAPITRE I

FORCES. MASSES. ACCÉLÉRATIONS

260. La *dynamique*, qui a pour objet l'étude d'un corps en mouvement et soumis à l'action de forces, repose sur les trois principes suivants :

Principe de l'inertie. — *Quand un corps est en repos, il reste en repos si aucune action extérieure ne vient agir sur lui. Quand un point matériel est en mouvement, son mouvement est rectiligne et uniforme si aucune force n'agit sur lui.*

Principe des mouvements relatifs. — *Étant donné un système animé, sous l'action de certaines forces, d'un mouvement d'ensemble et de* translation, *si une nouvelle force vient à agir sur l'un quelconque des points du système, elle lui imprime le même mouvement, dans le système, que si le système était au repos.*

Ce principe montre l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis.

Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — *Quand, dans un système de points matériels, un point* A *exerce sur un autre point* B, *une action représentée par une force* F *ayant pour droite d'action* AB, *le point* B *exerce sur* A *une réaction égale et directement opposée à* F.

261. Force constante. — Relativement à l'effet d'une force constante, nous rappellerons le théorème suivant qu'on démontre aisément :

Une force constante, agissant sur un point primitivement animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, et dirigée suivant la trajectoire, lui

communique un mouvement rectiligne et uniformément varié. Réciproquement, si un point est animé d'un mouvement rectiligne et uniformément varié, il est soumis à l'action d'une force constante.

262. Proportionnalité des forces aux accélérations. — ***Lorsque des forces constantes F, F', F'', ..., agissent successivement sur un même point matériel, elles lui impriment des mouvements rectilignes uniformément accélérés, dont les accélérations, γ, γ', γ'', ... sont proportionnelles aux intensités des forces correspondantes.***

On a donc

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \ldots = m.$$

m est la *masse* du point.

On a donc

$$F = m\gamma;$$

si nous remarquons de plus que F et γ sont deux vecteurs ayant mêmes direction et sens, les deux vecteurs (F) et $(m\gamma)$ seront identiques, de sorte que nous pourrons écrire

$$(F) = (m\gamma).$$

263. *Unités de* force *et de* masse.

Dans le système (C. G. S.) l'unité de masse est la masse d'un centimètre cube d'eau pure à 4° : on l'appelle le *gramme-masse*.

L'unité de force est la *dyne*; c'est la force capable de communiquer au gramme-masse un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est 1 centimètre.

On a donc symboliquement

$$1 \text{ (dyne)} = 1 \text{ (gramme-masse)} \times 1 \text{ (centimètre)}.$$

Cherchons la relation qui existe entre le kilogramme-force et la dyne.

A Paris, 1 kilogramme représente la force qui, agissant sur la masse de 1000 cent. cubes d'eau, lui imprime une accélération de $9^{m},808 = 980^{cm},8$.

On a donc

$$1 \text{ (kilogramme)} = 1\,000 \text{ (gramme-masse)} \times 980^{cm},8,$$

ou bien

$$1 \text{ (kilogramme)} = 1\,000 \times 980,8 \text{ dynes} = 10^{3} \times 9,808 \text{ dynes}.$$

264. *Équation fondamentale de la dynamique.* — Lorsqu'un point est animé d'un mouvement quelconque, F et γ étant la force et l'accélération, on démontre que l'on a, à chaque instant,

$$(F) = (m\gamma).$$

C'est l'équation fondamentale de la dynamique.

265. *Un point matériel pèse 2^{gr}; on lui applique une force constante de 3^{gr}. Quelle sera l'accélération produite par cette force ?*

Partons de la formule

$$F = m\gamma;$$

nous avons

$$F = 3, \qquad m = \frac{2}{g},$$

et il viendra, en substituant,

$$3 = \frac{2}{g}\gamma,$$

d'où

$$\gamma = \frac{3}{2}g = 14^{m},715.$$

266. *Quelle est la force constante qui, en 4 secondes, ferait parcourir un espace de* 100^{m} *à un corps de* 4^{kg} *?*

Les deux formules

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2, \qquad F = m\gamma,$$

nous donnent, après élimination de γ,

$$\frac{F}{e} = \frac{2m}{t^2},$$

d'où

$$F = \frac{2me}{t^2}.$$

Faisons $m = \frac{4}{g}$, $e = 100$, $t = 4$, il viendra

$$F = 5^{kg},1.$$

267. *Une force constante de* 6^{kg} *fait parcourir à un corps un espace de* 100^{m} *pendant 4 secondes. Quel est le poids de ce corps ?*

Les deux formules

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2, \qquad F = m\gamma,$$

nous donnent

$$\frac{F}{e} = \frac{2m}{t^2};$$

or, P étant le poids du corps, nous avons $P = mg$; nous pourrons donc écrire

$$\frac{F}{e} = \frac{2P}{gt^2},$$

d'où nous tirons

$$P = \frac{Fgt^2}{2e},$$

et, en introduisant les données que comporte l'énoncé, il vient

$$P = 4^{kg},7.$$

268. *La balle d'un fusil pèse* 27^{gr}, *elle a* 16^{mm} *de diamètre et possède au sortir du fusil une vitesse de* 425^{m}. *On suppose que la balle a mis* $0^{s},001$ *pour parcourir le canon et on demande d'exprimer en atmosphères l'effort moyen des gaz de la poudre.*

Nous avons

$$F = m\gamma, \qquad v = \gamma t\,;$$

d'où

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{Pv}{gt}\,;$$

mais

$$P = 27^{gr}, \qquad v = 425^{m}, \qquad t = 0^{s},001\,;$$

nous aurons donc, en remplaçant,

$$F = \frac{27 \times 425}{9,81 \times 0,001} = 1\,170^{kg}.$$

Cette pression s'exerçant sur la surface d'un cercle de diamètre 16^{mm}, chaque centimètre carré supportera une pression de $\frac{1\,170^{kg}}{\pi \times \overline{0,8}^2}$; enfin, comme chaque atmosphère représente une pression de $1^{kg},033$ par centimètre carré, il résulte que l'effort moyen sera de

$$\frac{1\,170}{\pi \times \overline{0,8}^2 \times 1,033} = 500 \text{ atm. environ.}$$

269. *On divise un poids* P *en deux parties et on attache ces*

poids partiels aux extrémités d'un cordon passant sur une poulie de masse négligeable. Calculer le poids de chacune des parties, pour que l'accélération du système ait une valeur donnée γ.

Soient x et $P - x$ les poids suspendus aux extrémités du cordon.

La masse en mouvement est $\frac{P}{g}$, et en supposant $x > P - x$, c'est-à-dire $x > \frac{P}{2}$, la force motrice est $x - (P - x) = 2x - P$. Nous aurons donc, en remplaçant dans la relation $F = m\gamma$,

$$2x - P = \frac{P}{g}\gamma,$$

d'où

$$x = \frac{g + \gamma}{2g} P.$$

D'après l'hypothèse, x doit être supérieur à $\frac{P}{2}$, et inférieur à P ; il vient donc

$$P > \frac{g + \gamma}{2g} P > \frac{P}{2},$$

d'où

$$\gamma < g.$$

En d'autres termes, l'accélération du système ne peut pas dépasser g.

270. *Dans une machine d'Atwood, les poids accrochés aux extrémités du cordon sont* $P = 52^{gr}$, $P' = 50^{gr}$. *Au bout d'une seconde de mouvement du système, on place, sans choc, un poids additionnel de* 4^{gr} *sur le poids* P', *et l'on demande de calculer la durée du mouvement ultérieur.* (*On négligera la masse du système des roues et celle du fil.*)

Dans le premier cas la force motrice est 2^{gr}, la masse en mouvement a pour expression $\frac{102}{g}$; par suite, l'accélération γ vérifiera la relation

$$2 = \frac{102}{g}\gamma,$$

d'où nous tirons

$$\gamma = \frac{2g}{102}.$$

Par suite, au bout de 1 seconde la vitesse du système sera

$$v_1 = \gamma = \frac{2g}{102};$$

c'est la vitesse initiale pour le mouvement ultérieur. Dans ce dernier mouvement, qui sera évidemment retardé, en raisonnant comme plus haut on trouve pour l'accélération γ',

$$\gamma' = \frac{2g}{106},$$

et il viendra pour la vitesse,

$$v = v_1 - \gamma' t,$$

ou bien

$$v = 2g\left(\frac{1}{102} - \frac{t}{106}\right).$$

Le système s'arrêtera quand on aura $v = 0$, c'est-à-dire pour

$$t = \frac{106}{102} = 1^s,039.$$

271. *Un homme peut soulever* 50 *boulets de* 2^{kg}. *Combien de boulets pourrait-il soulever, si la Terre en conservant la même densité avait un rayon moitié moindre.*

D'après la loi newtonienne, l'attraction d'une masse M sur une masse m située à la distance R est

$$\frac{fMm}{R^2},$$

f étant l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance.

Par suite, en appelant F et F′ les attractions de la Terre sur la masse m dans les deux cas de l'énoncé, nous aurons

$$\frac{F}{F'} = \frac{\dfrac{fMm}{R^2}}{\dfrac{fM'm}{R'^2}} = \frac{MR'^2}{M'R^2};$$

mais par hypothèse

$$R' = \frac{R}{2},$$

$$M = Vd = \frac{4}{3}\pi R^3 d,$$

$$M' = V'd = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 d;$$

nous aurons donc

$$\frac{F}{F'} = 2,$$

d'où

$$F' = \frac{F}{2}.$$

Par conséquent, si la Terre avait un rayon moitié moindre, un corps y pèserait moitié moins et un homme qui, dans le premier cas, pourrait soulever 50 boulets, pourrait en soulever 100 dans le second.

272. *Sachant que la loi des espaces, dans le mouvement d'un point qui se déplace rectilignement, s'écrit*

$$e = a \sin t,$$

trouver, à un instant quelconque, la force motrice.

La force motrice est donnée par

$$(F) = (m\gamma).$$

Or,

$$v = a \cos t;$$

en outre, le mouvement étant rectiligne, l'accélération est la dérivée de l'espace par rapport au temps; nous avons donc

$$\gamma = -a \sin t = -e,$$

et il vient finalement,

$$F = -me.$$

Le point est donc attiré proportionnellement à la distance, par l'origine des espaces.

EXERCICES

264. — Un corps pesant 10^{kg} est soumis à une force constante pendant 10 secondes ; au bout de ce temps, il a une vitesse de 147^{m}; calculer l'intensité de la force.

(*Saint-Cyr, 1896.*)

265. — A Paris, où la gravité égale $9^{m},8088$, au bout de combien de temps une force de 1 milligramme imprimerait-elle à une masse de 10^{kg} une vitesse de 10^{m} par seconde ?

(*Bacc. Alger, 1885.*)

266. — Un poids de 25^{kg} mobile sur un plan horizontal est soumis à une force horizontale constante de 10^{kg}. Trouver la vitesse du mobile, quand il sera à 50^{m} du point de départ.

(*Saint-Cyr, 1889.*)

267. — Quelle accélération une force de 6000^{kg} communiquerait-elle à un boulet de 12^{kg}, en agissant sur lui pendant $0^{s},1$?

268. — Dans une machine d'Atwood, les masses égales pèsent 200^{gr}; une surcharge a, placée sur l'une d'elles, lui fait parcourir 24^{cm} pendant les deux premières secondes de chute. On demande la valeur de a connaissant $g = 981^{cm}$.

(*Bacc. lettres-sc., Clermont, 1896.*)

269. — Un mobile de densité d est abandonné, sans vitesse initiale, à la surface d'une couche liquide d'épaisseur h et de densité d' $(d' < d)$. Calculer au bout de combien de temps le mobile arrivera au fond.

(*Bacc. lettres-sc., Poitiers, 1896.*)

270. — Dans une machine d'Atwood, les poids P et P', suspendus aux extrémités du fil, pèsent respectivement 200 et 160 grammes. Le poids P étant d'abord à la partie supérieure de la machine, le système est abandonné à l'action de la pesanteur sans vitesse initiale. D'autre part, un curseur annulaire C a été placé préalablement sur le parcours du poids P', de façon que ce dernier l'atteigne au bout d'une seconde et demie de mouvement. Sur ce curseur

repose une lame pesant 60^{gr}, que le corps entraîne dans son mouvement. On demande :

1° De déterminer la position que doit occuper le curseur ;

2° D'étudier le mouvement des corps P et P′ et de calculer la durée et l'amplitude de chacune des phases de ce mouvement ;

3° De trouver le centre de gravité de l'ensemble des corps mobiles pour l'une quelconque des positions du système.

On négligera l'effet du choc du poids P′ contre la lame additionnelle en C.

(*Conc. acad.*, *Grenoble*, *1879*.)

271. — Un corps pèse 10^{kg} à la surface de la Terre ; combien pèserait-il à la surface du Soleil, sachant que le rayon du Soleil vaut 108 rayons terrestres, et que la densité du Soleil est 0,25 en prenant celle de la Terre pour unité ?

272. — Un corps de poids P se déplace rectilignement suivant la loi

$$e = at^2 + bt + c ;$$

trouver la loi de la force motrice.

273. — Un point matériel pesant 1^{gr} parcourt une circonférence de 10^{m} avec la vitesse constante de $0^{m},5$ par seconde ; déterminer la force motrice.

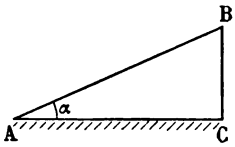
274. — Un vase renferme deux liquides de densités d et d' telles que $d' < d$. Le niveau du liquide de densité d' est à une distance h' du fond du vase et la distance de séparation des deux niveaux est h. On demande de quelle hauteur x au-dessus du liquide supérieur il faut laisser tomber un mobile de densité $D > d'$ pour que sa vitesse, à l'instant où il touche le fond du vase, soit égale à celle qu'aurait acquise le mobile s'il était tombé d'une hauteur $h + h'$. On fera abstraction de la résistance des liquides.

CHAPITRE II

MOUVEMENT SUR LE PLAN INCLINÉ POLI

---

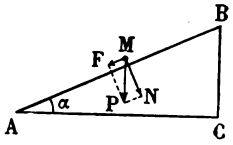
273. Considérons un plan incliné de l'angle α sur l'horizon, et coupons-le par un plan perpendiculaire à sa trace horizontale ; nous obtenons un triangle rectangle, dans lequel l'hypoténuse BC est une *ligne de pente* du plan.



Les côtés AC et BC ont reçu les noms de *base* et de *hauteur* du plan.

On dit aussi que B est le *sommet* du plan tandis que A en est le *pied*.

Imaginons sur un plan incliné poli, un corps M de poids P. En remplaçant P par ses deux composantes F, N, l'une dirigée suivant la ligne de pente, l'autre normale, on a



$$F = P \sin \alpha, \qquad N = P \cos \alpha.$$

N n'a aucune influence sur le mouvement du corps ; elle maintient simplement l'adhérence du corps au plan.

La force motrice est F ; d'ailleurs, comme elle est constante en grandeur et direction, si la vitesse initiale de M est dirigée suivant la ligne de pente BA, ce corps s'animera d'un mouvement uniformément varié suivant BA. Soit γ l'accélération de ce mouvement; nous avons en appliquant la formule $F = m\gamma$,

$$P \sin \alpha = \frac{P}{g}\gamma,$$

d'où

$$\gamma = g \sin \alpha.$$

Les formules du mouvement s'écriront alors

$$\left\{ \begin{aligned} e &= v_0 t \pm \frac{1}{2} g \sin \alpha . t^2, \\ v &= v_0 \pm g \sin \alpha . t, \\ v^2 - v_0^2 &= \pm 2g \sin \alpha . e. \end{aligned} \right.$$

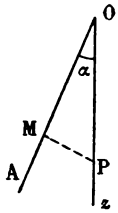
Si le corps pesant M est soumis à une autre force constante située dans un plan vertical, on la décomposera, comme nous venons de le faire pour P, et on verra que le corps sera encore animé d'un mouvement uniformément varié sur la ligne de pente ; l'accélération sera donnée en faisant usage de la relation fondamentale $F = m\gamma$.

274. *D'un point* O *on mène des obliques* OA, OA',... *Au même instant, des mobiles pesants partent du point* O, *sans vitesse initiale, et décrivent ces droites.*

Démontrer qu'à une époque quelconque, les positions de ces mobiles appartiennent à une même surface sphérique.

(GALILÉE)

Soit Oz la verticale du point O, OA une oblique; enfin P et M les positions au temps t des mobiles qui descendent suivant OP et OA.



Nous avons

$$OP = \frac{1}{2} g t^2, \qquad OM = \frac{1}{2} g \cos \alpha . t^2,$$

d'où nous tirons $OM = OP \cos \alpha$.

OM est donc la projection de OP sur OA; en d'autres termes, l'angle OMP est droit et tous les points tels que M sont situés sur la sphère de diamètre OP.

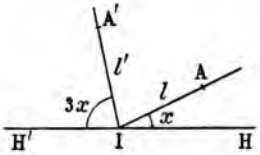
275. *On donne les longueurs* $AI = l$ *et* $A'I = l'$ *de deux plans inclinés polis, dont les angles* AIH *et* A'IH' *avec l'horizon sont tels que* $\widehat{A'IH'} = 3\widehat{AIH}$. *Des points matériels pesants, partant simultanément et sans vitesse des points* A *et* A', *mettent le même temps pour parcourir* AI *et* A'I. *On propose de déterminer l'angle* AIH *ainsi que le temps inconnu du parcours* AI.

(Diplôme de l'ens. spécial, Montpellier, 1882.)

Soit t le temps que met un mobile à parcourir AI; nous avons d'après l'hypothèse,

$$l = \frac{1}{2} g \sin x . t^2, \qquad l' = \frac{1}{2} g \sin 3x . t^2,$$

d'où nous tirons, en éliminant t^2,



$$(1) \qquad l \sin 3x - l' \sin x = 0;$$

mais

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

et nous avons, en remplaçant dans (1) et divisant par $\sin x$,

$$l(3 - 4 \sin^2 x) - l' = 0,$$

d'où
$$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3l - l'}{l}}.$$

Pour que cette solution existe, il faut simplement

$$\frac{3l - l}{l} > 0,$$

d'où
$$l > \frac{l'}{3}.$$

Nous aurons alors pour la durée du parcours AI,

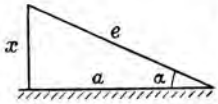
$$t^2 = \frac{2l}{g \sin x} = \frac{4l}{g}\sqrt{\frac{l}{3l - l'}},$$

d'où finalement,

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}\sqrt{\frac{l}{3l - l'}}}.$$

276. *On donne la base d'un plan incliné ; déterminer sa hauteur de telle sorte qu'un corps glissant le long de ce plan, mette le moins de temps possible pour descendre.*

Si e est la longueur de la ligne de pente du plan, le temps t que mettra le mobile pour parcourir ce plan sans vitesse initiale sera donné par la formule



$$e = \frac{1}{2} g \sin \alpha . t^2,$$

ou bien, en remarquant que

$$e = \sqrt{a^2 + x^2}, \qquad \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{gx}{2\sqrt{a^2 + x^2}} t^2,$$

d'où nous tirons

$$t^2 = \frac{2}{g}\,\frac{a^2+x^2}{x} = \frac{2}{g}\left(\frac{a^2}{x}+x\right).$$

Le produit des deux termes $\frac{a^2}{x}$ et x étant constant, leur somme sera minima quand ces termes seront égaux; nous aurons donc

$$\frac{a^2}{x} = x,$$

d'où

$$x = a.$$

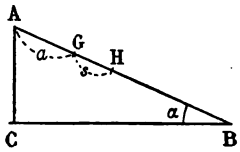
La hauteur du plan sera donc égale à sa base.

277. *On donne un plan incliné de hauteur* AC $= h$, *d'inclinaison* α, *et l'on propose :* 1° *de déterminer le temps qu'un mobile pesant parti du sommet* A *sans vitesse initiale, met à parcourir la portion* GH $= s$, *à une distance donnée* a *du point* A; 2° *de déterminer la position du point* G, *de manière qu'en faisant* GH $=$ AC $= h$, *le temps employé à parcourir* GH *par le mobile parti du point* A, *soit le même que le temps que mettrait un autre mobile pour tomber librement de* A *en* C.

Application numérique : $\alpha = 30°$, $h = 4^m$.

(*Diplôme, ens. spécial, Bordeaux, 1874.*)

1° Soient t, t' les temps employés par le mobile pour parcourir AG et AH; nous avons



$$a = \frac{1}{2}\,g\sin\alpha.t^2, \quad a+s = \frac{1}{2}\,g\sin\alpha.t'^2.$$

Pour parcourir GH le mobile mettra le temps $\tau = t' - t$, ou bien

$$(1) \qquad \tau = \sqrt{\frac{2}{g\sin\alpha}}\left(\sqrt{a+s}-\sqrt{a}\right).$$

2° Le temps employé par un mobile parcourant librement AC après être parti de A, sans vitesse initiale, est $\sqrt{\frac{2h}{g}}$; par con-

séquent si dans (1) nous faisons

$$s = h, \qquad \text{et} \qquad \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

il viendra

$$(2) \qquad \sqrt{a+h} - \sqrt{a} = \sqrt{h \sin \alpha}.$$

Cette équation détermine a, c'est-à-dire la distance AG. Multiplions les deux membres par $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$; nous obtiendrons

$$h = \sqrt{h \sin \alpha}\,(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}),$$

d'où

$$(3) \qquad \sqrt{a+h} + \sqrt{a} = \sqrt{\frac{h}{\sin \alpha}}.$$

Retranchons maintenant (2) de (3) membre à membre, il viendra

$$2\sqrt{a} = \sqrt{\frac{h}{\sin \alpha}}\,(1 - \sin \alpha),$$

d'où

$$a = \frac{h}{4 \sin \alpha}\,(1 - \sin \alpha)^2.$$

Pour que le problème soit possible, il faut $AH < AB$,

c'est-à-dire

$$a + h < \frac{h}{\sin \alpha},$$

ou bien

$$\frac{h}{4 \sin \alpha}\,(1 - \sin \alpha)^2 + h < \frac{h}{\sin \alpha},$$

d'où nous tirons

$$-(3 + \sin \alpha) < 0;$$

cette inégalité étant toujours vérifiée, le problème est toujours possible.

Application numérique. — $\alpha = 30^\circ$, $h = 4^m$.

Nous obtenons dans ce cas

$$a = \frac{4}{4\,\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0^m,5.$$

278. 1° *Deux mobiles* M *et* N, *soumis à la seule action de la pesanteur, descendent le long de deux plans inclinés* OP, OQ, *faisant des angles* α *et* β *avec l'horizon. Ils partent sans vitesse initiale l'un de* A, *l'autre de* B. *On donne* $OA = a$, $OB = b$. *Calculer au bout de combien de temps la droite* MN *qui joint les mobiles, sera horizontale. Donner les conditions de possibilité.*

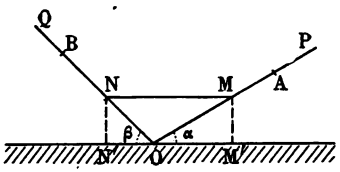
Application numérique :

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 30^\circ, \quad a = 40^m, \quad b = 10^m, \quad g = 9^m,81.$$

2° *Les angles* α *et* β *n'étant plus donnés, mais connaissant seulement* $\widehat{QOP} = \varphi$, *déterminer* α *et* β *par la condition que les deux mobiles, partis de* A *et* B *sans vitesse initiale, arrivent ensemble en* O.

(*Bacc. ès sciences, Alger, 1889.*)

1° Supposons le problème résolu. Nous avons



$$AM = \frac{1}{2} g \sin\alpha . t^2,$$

$$BN = \frac{1}{2} g \sin\beta . t^2.$$

MN étant horizontale,

$$MM' = NN',$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$(a - AM) \sin\alpha = (b - BN) \sin\beta,$$

ou bien, après substitution,

$$\frac{1}{2} g (\sin^2\alpha - \sin^2\beta) t^2 = a \sin\alpha - b \sin\beta,$$

d'où nous tirons

$$t = \sqrt{\frac{2(a \sin\alpha - b \sin\beta)}{g(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)}}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que t soit réel et que l'horizontale MN soit située au-dessus de O.

Exprimons la première condition, nous aurons

$$(1) \qquad (a \sin\alpha - b \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) > 0.$$

La seconde condition s'écrit $AM < a$,

ou
$$\frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} \sin \alpha < a,$$
ou bien encore

(2) $$(a \sin \beta - b \sin \alpha)(\sin \alpha - \sin \beta) < 0.$$

Les inégalités (1) et (2) s'écriront encore, en posant $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = z$,

(1)′ $$(az - b)(z - 1) > 0,$$

(2)′ $$(a - bz)(z - 1) < 0.$$

Supposons $a < b$; nous voyons, en considérant la suite

$$0 \qquad \frac{a}{b} \qquad 1 \qquad \frac{b}{a} \qquad +\infty,$$

que z doit être compris entre 0 et $\frac{a}{b}$ ou bien doit être supérieur à $\frac{b}{a}$.

Supposons $a > b$, nous aurons la suite

$$0 \qquad \frac{b}{a} \qquad 1 \qquad \frac{a}{b} \qquad +\infty.$$

qui nous montre que z doit être inférieur à $\frac{b}{a}$ ou supérieur à $\frac{a}{b}$.

Application numérique. — $a = 40^m$, $b = 10^m$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $g = 9^m,81$.

$$\frac{a}{b} = 4, \qquad z = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \sqrt{3};$$

par conséquent, d'après la discussion précédente, il y a impossibilité.

2° Soit t le temps que mettent les deux mobiles pour arriver au point O; nous avons

$$a = \frac{1}{2} g \sin \alpha . t^2, \qquad b = \frac{1}{2} g \sin \beta . t^2;$$

d'où nous tirons

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b},$$

ou bien

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b},$$

d'où $$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Soit $a > b$ pour fixer les idées; si ω est le plus petit arc positif ayant pour tangente $\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$, nous aurons le système

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{\alpha-\beta}{2} = \omega,$$

qui nous donne

$$\alpha = 90^\circ + \omega - \frac{\varphi}{2}, \qquad \beta = 90^\circ - \omega - \frac{\varphi}{2},$$

φ est inférieur à 180° et ω est aigu.

Il faut pour que ces solutions soient acceptables que α et β soient positifs et inférieurs à 90°; ceci nous donne

$$\omega < \frac{\varphi}{2}, \qquad \omega < 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

I. — $\varphi < 90^\circ$. Alors, il suffit que l'inégalité

$$\omega < \frac{\varphi}{2}$$

soit vérifiée.

Nous avons alors

$$\operatorname{tg}\omega < \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

ou bien $$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\varphi}{2} < \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

d'où $$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} > \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

II. — $\varphi > 90°$. Dans ce cas c'est l'inégalité

$$\omega < 90° - \frac{\varphi}{2},$$

qui entraîne l'autre, et nous avons

$$\operatorname{tg} \omega < \cot \frac{\varphi}{2},$$

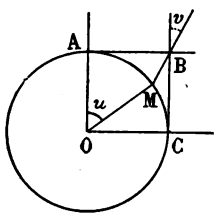
ou bien
$$\frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} < \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2};$$

inégalité évidemment vérifiée.

279. *Dans un plan vertical, on donne un cercle dont le centre est un point* O *et le rayon égale* R; *sur la tangente au point le plus élevé* A *de la circonférence on prend une longueur* AB = R *et l'on mène la droite qui va du point* B *au point* M, *pris sur la circonférence de telle sorte que* $\widehat{AOM} = u$. *Calculer, en fonction de* u, *le temps* t *qu'un point pesant mettrait pour parcourir la droite* BM. *Étudier les variations de* t *quand* u *varie de* 0 *à* 360°.

(*Bacc. ès sciences, Caen, 1894.*)

Joignons OM, MB et OB, nous avons



$$(OM) + (MB) = (OB);$$

par conséquent, désignant par v l'angle de MB avec OA et projetant sur la verticale OA et l'horizontale OC, il viendra

$$(1) \quad \begin{cases} R \cos u + MB \cos v = R, \\ R \sin u + MB \sin v = R. \end{cases}$$

L'accélération du mobile pesant qui décrit BM étant $g \cos v$, le temps t qu'il mettra pour parcourir ce segment rectiligne vérifiera la formule connue

$$MB = \frac{1}{2} g \cos v . t^2,$$

et nous aurons

$$t^2 = \frac{2}{g} \frac{MB}{\cos v} = \frac{2}{g} \frac{\overline{MB}^2}{MB \cos v}.$$

Or, les formules (1) s'écrivant encore

$$\mathrm{MB}\cos v = \mathrm{R}(1 - \cos u),$$
$$\mathrm{MB}\sin v = \mathrm{R}(1 - \sin u),$$

nous donnent

$$\overline{\mathrm{MB}}^2 = \mathrm{R}^2(3 - 2\cos u - 2\sin u).$$

Il viendra donc, après substitution,

$$t^2 = \frac{2\mathrm{R}}{g}\,\frac{3 - 2\cos u - 2\sin u}{1 - \cos u};$$

t^2 varie uniquement avec la fraction $y = \dfrac{3 - 2\,\mathrm{co}}{1 -}$

D'ailleurs, y est une fonction continue de u et culons sa dérivée, nous obtiendrons

$$y' = \frac{2 - \sin u - 2\cos u}{(1 - \cos u)^2} = \frac{2\sin^2\frac{u}{2}\left(2 - \mathrm{cc}\right.}{(1 - \cos u)^{\cdot}}$$

Nous voyons maintenant que y' est négative qu de 0 à $u' = 2\,\mathrm{arc\,cot}\,2$, s'annule pour $u = u$ positive; par conséquent le temps t décroît dep jusqu'à

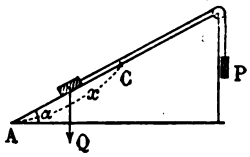
$$t = \sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{g}\cdot\frac{3 - 2\cos u' - 2\sin u'}{1 - \cos u'}} = \sqrt{\cdot}$$

puis croît jusqu'à $t = \infty$.

Comme on peut le vérifier aisément, le point M' pond au minimum du temps, est le point de con circonférence donnée de la circonférence passant pa son centre sur BC et tangente à la première.

280. *Un plan incliné d'un angle α sur l'horizon gueur l; à son sommet est fixée une poulie, à l'aide un poids* P, *descendant verticalement, fait remonter le long du plan. A quel instant et en quel point le pc il cesser son action pour que* Q *puisse atteindre just du plan ?*

Soit C la position du poids Q au moment où P cesse son action, et t la durée de la première phase du mouvement. Dans cette première phase, la masse en mouvement est $\frac{P+Q}{g}$, la force motrice a pour expression $P - Q \sin\alpha$; par conséquent, γ étant l'accélération, nous aurons, en remplaçant dans l'équation fondamentale de la dynamique $(F) = (m\gamma)$,



$$P - Q \sin\alpha = \frac{P+Q}{g}\gamma,$$

d'où nous tirons

$$\gamma = \frac{P - Q\sin\alpha}{P+Q}\, g.$$

Le mouvement étant alors uniformément accéléré, nous avons les deux formules

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2}\,\frac{P - Q\sin\alpha}{P+Q}\, g t^2,$$

$$v^2 = 2\gamma x = 2\,\frac{P - Q\sin\alpha}{P+Q}\, g x,$$

v étant la vitesse au point C.

Dans la seconde phase du mouvement, la masse en mouvement est simplement $\frac{Q}{g}$, l'accélération γ' a pour valeur $g \sin\alpha$, enfin ce mouvement est uniformément retardé avec la vitesse initiale v.

Par conséquent, si dans la formule connue, où w représente la vitesse,

$$w^2 - w_0^2 = -2\gamma' e,$$

nous faisons

$$w = 0, \qquad w_0 = v, \qquad \gamma' = g\sin\alpha, \qquad e = l - x,$$

nous obtiendrons

$$2\,\frac{P - Q\sin\alpha}{P+Q}\, g x = 2g\sin\alpha(l - x),$$

d'où
$$x = \frac{(P+Q)\sin\alpha}{P(\sin\alpha+1)}\,l.$$

La formule (1) nous donnera ensuite pour la durée t d'action du poids P

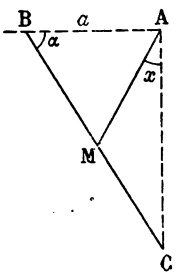
$$t = (P+Q)\sqrt{\frac{2l\sin\alpha}{gP(P-Q\sin\alpha)(\sin\alpha+1)}}.$$

Pour que le problème soit possible il faut que l'on ait

$$P - Q\sin\alpha > 0.$$

281. *On donne un point* A *et une droite indéfinie* BC, *situés dans un même plan vertical. Quelle est la droite qu'un corps pesant doit suivre, pour arriver du point* A *à la droite* BC *dans le temps le plus court possible ?*

Définissons la position de la droite BC par la distance $BA = a$, comptée sur l'horizontale du point A, et l'angle α.



Soit d'autre part AC la verticale descendante de A et $\widehat{MAC} = x$.

L'accélération du mobile pesant qui descend suivant AM étant $g\cos x$, nous aurons, t étant le temps qu'il met à parcourir AM sans vitesse initiale,

$$AM = \frac{1}{2}g\cos x.t^2;$$

mais nous avons dans le triangle ABM,

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos(x-\alpha)},$$

d'où
$$AM = \frac{a\sin\alpha}{\cos(x-\alpha)};$$

il viendra après substitution,

$$\frac{a\sin\alpha}{\cos(x-\alpha)} = \frac{1}{2}g\cos x.t^2.$$

d'où

$$t^2 = \frac{2a \sin \alpha}{g \cos x \cos (x - \alpha)} = \frac{4a \sin \alpha}{g [\cos (2x - \alpha) + \cos \alpha]}.$$

t^2 est minimum quand $\cos (2x - \alpha)$ est maximum, c'est-à-dire pour

$$2x - \alpha = 0,$$

d'où

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

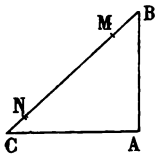
On voit alors que le triangle ABM est isocèle ; on a, en effet,

$$\widehat{BMA} = \widehat{BAM} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

On portera donc sur BC, BM = BA et on obtiendra le chemin AM qui correspond au minimum de t.

EXERCICES

275. — Etant donné un plan incliné ABC, on propose de trouver sur BC deux points M et N tels que MN = AB = c et que MN soit parcouru dans le même temps que la hauteur BA serait parcourue par un autre point pesant, tombant librement de B. Le point pesant qui parcourt BC est supposé parti de B sans vitesse.



(*Diplôme 1re cl. Elève de la marine marchande, 1897.*)

276. — Diviser le plan incliné en trois parties telles qu'un corps, en descendant le long de ce plan, mette le même temps à parcourir chacune d'elles.

277. — Un corps est projeté avec la vitesse v le long d'un plan incliné et à partir du sommet de ce plan. Après n secondes, un corps est projeté avec une vitesse v' et à partir du pied. Déterminer le lieu de la rencontre.

278. — Une bille descend sur un plan incliné poli à 45° et passe successivement par deux points A, B distants de 4^m. Au moment où

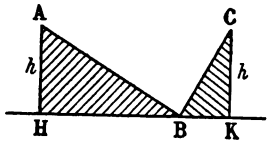
elle passe au point A, la bille possède une vitesse de 5^m. Calculer :

1° le temps employé par la bille pour aller de A en B ;

2° la vitesse que possède la bille au moment où elle passe en B.

(*Concours général, 1872.*)

279. — On considère dans un plan vertical deux segments de droite AB, BC. Les points A et C sont à la même distance $AH = CK = h$ de l'horizontale HBK qui passe par le point B ; ce point B est de plus supposé situé entre H et K.

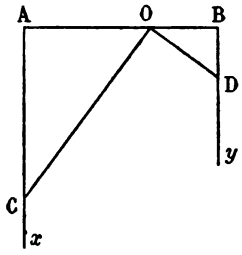


Soient t_1 le temps qu'un point matériel pesant, abandonné en A sur AB mettrait à atteindre B ; t_2 le temps qu'un point matériel pesant abandonné en C sur CB mettrait à atteindre B ; T le temps qu'un point matériel pesant abandonné librement dans l'espace mettrait à descendre d'une hauteur AB + BC.

Cela étant, on demande de déterminer les inclinaisons des deux droites AB, BC sur l'horizontale, par les deux conditions suivantes : 1° la suite t, T, t_2 forme une progression arithmétique ; 2° la somme des volumes engendrés par AHB et BKC en tournant respectivement autour de AB, BC, soit égale à m fois le volume de la sphère de rayon h.

(*Bacc. ès sciences, Montpellier, 1894.*)

280. — Sur la perpendiculaire AB à deux parallèles Ax, By, on prend un point O, tel que $AO = m$, $BO = n$. Un angle droit pivote autour de O, sommet de cet angle, les côtés rencontrant les parallèles en des points variables C, D. Du point O partent, sans vitesse initiale, deux points matériels pesants qui suivent les côtés OC, OD.



1° Démontrer que les temps employés par ces mobiles pour arriver aux points C et D sont dans un rapport constant quelle que soit la position de l'angle droit.

2° Calculer les temps quand $AC = 7^m,50$, $m = 8^m,3$, $n = 11^m,70$, $g = 9^m,8$.

(*Bacc. spécial, Alger, 1893.*)

281. — Un plan incliné fait 30° avec l'horizon ; à son sommet est fixée une poulie sur laquelle passe un cordon, et aux extrémités du

cordon sont attachés deux poids égaux ; l'un de ces poids repose sur le plan et l'autre descend verticalement. Le premier poids, en remontant le plan sous l'action du second, parcourt $7^m,66$ en $2^s,5$; déterminer l'intensité de la pesanteur.

282. — On donne deux plans inclinés AB, AC tels que les angles ABD, ACD soient complémentaires et dans le rapport de 1 à 2. On laisse tomber de A, simultanément, trois corps : l'un suivant AB, l'autre suivant AC, le troisième suivant la verticale AD. On ne tient pas compte du frottement et l'on demande :

1° De calculer les espaces parcourus par ces trois corps au bout de 3 secondes, ainsi que les côtés et les angles du triangle formé en joignant leurs positions au bout de ce temps ;

2° De démontrer que ce triangle est toujours semblable à lui-même et que son aire est proportionnelle à t^4.

(*Conc. acad., Aix, 1877.*)

283. — Deux corps P, Q placés sur deux plans inclinés sont unis par un fil flexible, qui passe sur une poulie placée au sommet. Etudier le mouvement du corps P sachant que les angles que font ces plans avec l'horizon sont i et i'.

(*Brev. de Cluny, 1880.*)

284. — Deux corps partent en même temps de deux points situés à 100^m au-dessus d'un même plan horizontal ; le premier tombe librement, le second suit un plan incliné suivant la ligne de plus grande pente avec une vitesse initiale de 30^m. Ils arrivent en même temps sur le plan horizontal. Quelle est l'inclinaison du plan ?

(*Concours général, 1873.*)

285. — On donne une circonférence et un point A dans son plan ; M étant un point de la circonférence, on imagine un point matériel pesant qui descend, sans vitesse initiale, la droite AM.

Trouver les positions du point M sur la circonférence, telles que le temps employé par le mobile pour décrire AM soit maximum ou minimum.

286. — Deux droites Cx, Cy situées dans un même plan vertical sont respectivement définies par les hauteurs a et b comprises entre l'horizontale passant en C et deux points A, B, distants du précédent d'une quantité égale à l'unité de longueur. A un instant donné, un corps pesant part sans vitesse initiale d'une position A′ située sur Cx et telle que $CA' = m$.

A quelle distance $CB' = x$, faut-il place: pesant pour que, partant au même instant arrive en C en même temps que le premi commune des deux mouvements ? Quel ser de B′ si, conservant tout le reste sans c varier la direction Cy ?

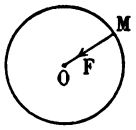
(*Diplôme, ens. spéci*

CHAPITRE III

FORCE CENTRIFUGE

---

282. Considérons un point M parcourant une circonférence O d'un mouvement uniforme et cherchons la force qui le sollicite à chaque instant.



D'après l'équation fondamentale de la Dynamique,

$$(F) = (m\gamma),$$

il suffit de calculer γ.

Or, nous avons vu (191) que l'accélération γ du mobile est normale à la circonférence, dirigée vers le centre O et a pour grandeur $\gamma = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. Par suite, la force F est constamment dirigée vers le centre de la circonférence et a pour intensité

$$F = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R.$$

On donne à F le nom de *force centripète*.

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la circonférence offre une réaction égale et directement opposée à la force F ; c'est la *force centrifuge*.

283. *Quel est le plus petit nombre de tours qu'un vase attaché à l'extrémité d'une ficelle de longueur l doit faire par minute, pour que l'eau qu'il contient ne se renverse pas?*

L'eau ne tombera pas quand la force centrifuge F agissant sur la masse du liquide sera précisément égale au poids P de cette masse.

On aura donc

$$F = P,$$

ou bien

$$\frac{mv^2}{l} = mg.$$

Or, si n est le nombre de tours par minute, nous avons

$$v = \frac{n}{60} 2\pi l = \frac{\pi l n}{30},$$

et il viendra

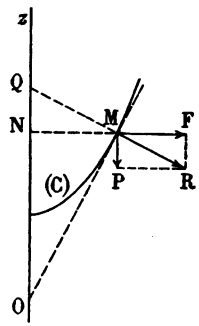
$$\frac{\pi^2 l n^2}{30^2} = g,$$

d'où

$$n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

284. *Un vase contenant de l'eau est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical. Déterminer la surface libre du liquide en équilibre relatif.*

Imaginons la section du liquide par un plan contenant l'axe de rotation Oz, et considérons une molécule M de masse m.



Cette molécule étant en équilibre, la résultante R de la force centrifuge F et de son poids P doit être normale à la surface du liquide, et en particulier à la section méridienne (C).

NQ sera, par suite, la *sous-normale* en M à cette courbe.

Or, les triangles semblables MFR, MNQ nous donnent

$$\frac{NQ}{MN} = \frac{P}{F} = \frac{mg}{m\omega^2 \overline{MN}},$$

d'où nous tirons

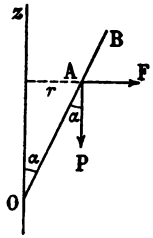
$$NQ = \frac{g}{\omega^2}.$$

La courbe (C) jouissant de la propriété d'avoir sa *sous-normale* constante est une *parabole* d'axe Oz.

Par suite, la surface libre du liquide sera un *paraboloïde de révolution.*

285. *Une bille* A *peut glisser sans frottement à l'intérieur d'un tube* OB, *dont l'axe fait un angle* α *avec une verticale* Oz. *Le tube étant animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de* Oz, *on demande de trouver la position d'équilibre relatif de la bille.*

Le point A sera en équilibre relatif quand la résultante de la force centrifuge F et du poids P sera normale à OB.



Alors la somme de leurs projections sur OB sera nulle et nous aurons

$$P \cos \alpha = F \sin \alpha,$$

mais

$$P = mg,$$

$$F = m\omega^2 r = m\omega^2 \overline{OA} \sin \alpha,$$

et nous aurons, en remplaçant,

$$g \cos \alpha = \omega^2 \sin^2 \alpha . \overline{OA},$$

d'où nous tirons

$$OA = \frac{g}{\omega^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

286. *Force centrifuge à la surface de la Terre. Poids d'un corps.*

Considérons un point matériel M de masse m situé à la surface de la Terre, à une latitude λ.

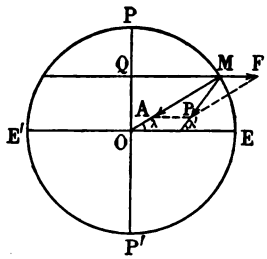
L'attraction de la Terre étant a sur l'unité de masse à sa surface, sera $A = ma$ sur le point considéré.

D'autre part, ce point sera soumis à l'action de la force centrifuge

$$F = m\omega^2 MQ = m\omega^2 R \cos\lambda,$$

R étant le rayon de la Terre.

Le poids du corps qui est accusé par le dynamomètre, n'est autre que son *poids apparent*, mesuré par la résultante P des forces A et F.



Il suit de là que la Terre étant supposée sphérique, les verticales ne passent pas par son centre.

La latitude géographique qui est λ' n'est pas égale à λ mais peu différente.

Calculons P, nous avons

$$P^2 = A^2 + F^2 - 2A.F.\cos\lambda,$$

ou bien, en remarquant que $P = mg$ et substituant à A et F leurs valeurs données plus haut,

$$g^2 = a^2 + \omega^4 R^2 \cos^2\lambda - 2a\omega^2 R \cos^2\lambda.$$

Cette équation nous donne g.

A l'équateur, on a $\lambda = 0$, et il vient pour l'accélération de la pesanteur,

$$(1) \qquad g = a - \omega^2 R.$$

Cherchons la vitesse ω' que devrait posséder la Terre pour que la pesanteur fût nulle à l'équateur.

Nous aurions alors

$$0 = a - \omega'^2 R,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (1),

$$g = \omega'^2 R - \omega^2 R,$$

d'où

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} = 1 + \frac{g}{R\omega^2}.$$

En faisant dans cette formule

$$g = 9{,}78, \qquad R = 6378233, \qquad \omega = \frac{2\pi}{86164},$$

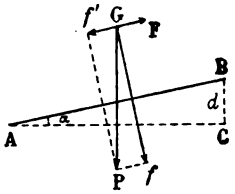
on obtient

$$\omega' = 17\omega.$$

287. *Une voie ferrée décrit une courbe circulaire de rayon* R. *Calculer le surhaussement qu'il est nécessaire de donner au rail extérieur par rapport au rail intérieur, pour combattre l'effet de la force centrifuge, qui tendrait à faire prendre la tangente aux trains parcourant la voie. La vitesse normale de ces trains est* v; *l'écartement des rails est* e (1m,51 *du milieu d'un rail au milieu de l'autre*).

(*Journal de Vuibert, 1881-82.*)

Soit AB le plan incliné formé par la voie. Désignons par P le poids d'un véhicule parcourant la voie et dont le centre de gravité est G; enfin appelons F la force centrifuge due à la vitesse v et à la courbure de la voie.



La force P se décompose en deux autres : l'une f qui maintient l'adhérence du wagon aux rails; l'autre, f' qui doit combattre l'effet de la force centrifuge F.

Nous devons donc avoir $F = f'$.

Mais $$F = \frac{P}{g}\frac{v^2}{R},$$ (R étant le rayon de courbure)

et $$f' = P \sin \alpha = P\frac{d}{e},$$

de sorte qu'il viendra

$$P\frac{d}{e} = \frac{P}{g}\frac{v^2}{R},$$

d'où $$d = \frac{ev^2}{Rg}.$$

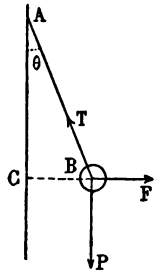
Ce surhaussement d s'appelle le *devers* de la voie.

288. *Équilibre relatif des boules dans le régulateur de Watt.*

Négligeant le poids des tiges articulées, la boule B sera en équilibre relatif sous l'action simultanée de son poids P, de la force centrifuge

$$F = m\omega^2 . CB$$

et de la réaction T de la tige AB.



Nous aurons donc

$$\frac{P}{\sin(T, F)} = \frac{F}{\sin(P, T)},$$

ou bien, en posant $AB = l$,

$$\frac{mg}{\cos\theta} = \frac{m\omega^2 l \sin\theta}{\sin\theta},$$

d'où

$$(1) \qquad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

1° $\omega^2 l < g$. — $\cos\theta$ n'existe pas; par conséquent, quand ω est inférieur à $\sqrt{\frac{g}{l}}$, la boule reste adhérente à l'axe AC.

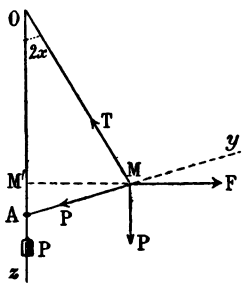
2° $\omega^2 l > g$. — La formule (1) nous donne pour θ une valeur et une seule.

289. *Deux plans verticaux parallèles très voisins et invariablement liés, tournent uniformément avec la vitesse* ω, *autour d'une charnière verticale* Oz.

Entre ces deux plans peut se mouvoir, sans frottement, un point matériel M *de poids* P. *Ce point* M *est attaché à deux fils, dont l'un, de longueur* l, *est fixé au point* O; *l'autre passe librement dans un anneau horizontal très petit, placé au point* A *de* Oz, *au-dessous de* O *et à la distance* $OA = l$, *et supporte à la seconde extrémité un poids* P.

Position d'équilibre relatif du point M? *Stabilité.*

Application numérique : $l = g$, $\omega = 2$.



Le point M est soumis à l'action de son poids P, de la force centrifuge $F = m\omega^2 . M'M$ et des tensions T et P des deux fils. Posons $\widehat{zOM} = 2x$; nous aurons

$$F = m\omega^2 l \sin 2x.$$

Projetons les forces sur la perpendiculaire My à OM et sur Oz, il viendra

$$(1) \qquad m\omega^2 l \sin 2x \cos 2x - mg \sin 2x - mg \cos x = 0,$$

ou bien

$$(1)' \qquad -4\omega^2 l \sin^3 x + 2(\omega^2 l - g)\sin x - g = 0,$$

puis

$$P - T\cos 2x + P\sin x = 0,$$

d'où nous tirons

$$(2) \qquad T = \frac{1+\sin x}{\cos 2x} P.$$

L'équation (1)′ permet de résoudre la question de l'équilibre; quant à la relation (2) elle fournira la tension T du fil.

D'ailleurs pour que le fil OM soit tendu il faut $T \geqslant 0$, d'où $2x \leqslant \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Pour étudier l'équation (1)′, posons $\sin x = z$, nous aurons

$$(3) \qquad f(z) = -4\omega^2 l z^3 + 2(\omega^2 l - g)z - g = 0.$$

Prenons la dérivée, il viendra

$$f'(z) = -12\omega^2 l z^2 + 2(\omega^2 l - g).$$

Distinguons trois cas suivant la nature des racines de $f'(z)=0$.

1° $\omega^2 l - g < 0$. — On a $f'(z) < 0$ quelle que soit z; donc $f(z)$ sera constamment décroissante.

Quand x varie entre ses limites 0 et $\frac{\pi}{4}$, z varie de 0 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$; or

$$f(0) = -g < 0,$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -g(1+\sqrt{2}) < 0;$$

par suite, $f(z)$ ne s'annule pas pour une valeur de z comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et l'équilibre est impossible dans ce cas.

2° $\omega^2 l - g = 0$. — L'équation (3) n'admet qu'une racine réelle, d'ailleurs négative, et il y a encore impossibilité pour l'équilibre.

3° $\omega^2 l - g > 0$. — L'équation dérivée admet pour racines

$$z' = \sqrt{\frac{\omega^2 l - g}{6\omega^2 l}}, \qquad z'' = -\sqrt{\frac{\omega^2 l - g}{6\omega^2 l}};$$

on voit d'autre part et facilement, que z' est comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$; nous aurons donc le tableau suivant :

z	0		z'		$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(z)$	$+$	⌒	0	⌒	$-$
$f(z)$	$-g$ croît	↗	max.	↘ décroît	$-g(1+\sqrt{2})$

Pour que $f(z) = 0$ ait deux racines z_1, z_2, comprises entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ il faut et il suffit que

$$f(z') > 0.$$

Si $f(z') = 0$, une seule racine est comprise entre les limites considérées; enfin si $f(z') < 0$ l'équilibre est impossible. Un calcul facile nous donne

$$f(z') = \frac{4}{3}(\omega^2 l - g)\sqrt{\frac{\omega^2 l - g}{6\omega^2 l}} - g,$$

de sorte que nous aurons en résumé,

pour $8(\omega^2 l - g)^3 - 27 g^2 \omega^2 l > 0$ 2 positions d'équilibre : z_1, z_2;
» » $= 0$ 1 position d'équilibre z_0;
» » < 0 aucune position d'équilibre.

Stabilité. — Décomposons les forces qui agissent sur le point M suivant OM et la perpendiculaire My; la première composante est équilibrée par la tension du fil, quant à la seconde elle a pour valeur

$$mf(z).$$

Soit z_1 une valeur de z qui répond à l'équilibre; écartons M très peu de sa position d'équilibre, x_1 variera de Δx_1 et z_1 subira une variation Δz_1 de même signe que Δx_1. Ceci posé, on voit aisément sur la figure qu'il y aura stabilité si $mf(z_1 + \Delta z_1)$, valeur que prend la composante suivant My, et Δz_1 sont de

signes contraires, ou, comme $f(z_1) = 0$,

si
$$\frac{f(z_1 + \Delta z_1) - f(z_1)}{\Delta z_1} < 0,$$

ou bien, à la limite, si
$$f'(z_1) < 0.$$

Il y aura instabilité si $f'(z_1) > 0$.

Si $f'(z_1) = 0$, l'équilibre sera pareillement instable, car z_1 est racine double de $f(z) = 0$, de sorte que $f(z_1 - \Delta z_1)$ et $f(z_1 + \Delta z_1)$ auront le même signe; alors les rapports
$$\frac{f(z_1 - \Delta z_1)}{-\Delta z_1} \quad \text{et} \quad \frac{f(z_1 + \Delta z_1)}{\Delta z_1}$$
auront des signes contraires.

En résumé, si nous nous reportons à la discussion du cas 3°, nous voyons que nous pouvons avoir deux positions d'équilibre, l'une stable, l'autre instable; ou bien une seule position d'équilibre qui sera alors instable.

Application numérique. — $l = g$, $\omega = 2$:
$$\omega^2 l - g = 3g,$$
$$8(\omega^2 l - g)^3 - 27 g^2 \omega^2 l = 108 g^3.$$

Il y a donc deux positions d'équilibre.

L'équation (3) s'écrit d'ailleurs
$$-16z^3 + 6z - 1 = 0;$$
elle admet visiblement pour racines $z_1 = \frac{1}{2}$, puis celles de l'équation
$$8z^2 + 4z - 1 = 0,$$
ou bien
$$z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4},$$
$$z_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{4}.$$

$z_1 = \sin x_1 = \frac{1}{2}$ donne
$$x_1 = 30°, \qquad 2x_1 = 60°.$$

Pour cette solution l'équilibre est stable.

L'équation

$$\sin x = z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$$

fournit au contraire une position d'équilibre instable.

EXERCICES

287. — Calculer la force centrifuge qui s'exerce sur un corps du poids de 10^{kg} parcourant une circonférence de 2^m de rayon et faisant 30 tours à la minute.

288. — Calculer la tension maxima qu'éprouve un fil de $0^m,60$ de long qui supporte un poids de 200^{gr} et auquel on imprime, dans un plan vertical, une rotation avec une vitesse de 2 tours à la seconde.

289. — On fait tourner à l'aide d'une fronde, une pierre du poids de 1^{kg}, dans un cercle de rayon $1^m,50$. La corde de cette fronde ne peut supporter qu'une tension de 50^{kg}; cette corde se rompt au moment où la pierre atteint un point C placé de façon que CA = CB (AB étant un rayon horizontal et A le centre).

On demande la hauteur à laquelle s'élèvera la pierre dans le vide et l'amplitude du jet.

(*Conc. acad.*, *Bordeaux*, *1877*.)

290. — Un canal circulaire tourne uniformément autour d'un diamètre vertical. Trouver la position d'équilibre relatif d'un point pesant situé à l'intérieur du canal.

291. — Une tige AB homogène, est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de la verticale Az. On connaît le poids 2^{kg} de AB, sa longueur 2^m et l'angle BAz = 30°. Calculer la force centrifuge qui s'exerce sur la tige.

292. — Un rectangle homogène plein ABCD, tourne uniformément autour du côté AB vertical; calculer la force centrifuge qui agit sur lui.

293. — Une circonférence homogène de masse m peut tourner autour d'un diamètre horizontal AA′ comme charnière. Cette charnière fait corps, en son milieu, avec un axe vertical BB′, autour duquel le système tourne avec une vitesse constante et donnée. Par suite de cette rotation, l'anneau tend à se placer dans un plan horizontal; mais cette tendance est combattue par la pesanteur sur une masse additionnelle M, fixée à l'extrémité C du diamètre perpendiculaire à la charnière.

Déterminer la position angulaire pour laquelle l'anneau resterait en repos relatif.

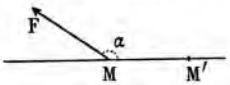
(*Concours d'Agrégation* [Extrait], *1873*.)

CHAPITRE IV

TRAVAIL

---

290. Force constante. — 1° *Trajectoire rectiligne.* Le travail de la force F faisant l'angle α avec la direction du déplacement MM' est, par définition,



$$\mathcal{T} = F.\overline{MM'}.\cos\alpha.$$

On a donc

$$\mathcal{T} = \text{Force} \times \text{proj. du dépl}^{t} \text{ sur la direct. de la force,}$$

ou bien encore

$$\mathcal{T} = \text{Déplac}^{t} \times \text{proj. de la force sur direct. du déplac}^{t}.$$

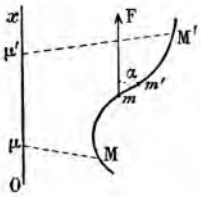
F et MM' sont essentiellement positives.

Si $\cos\alpha > 0$ on a $\mathcal{T} > 0$, le travail est dit *moteur.*

» $\cos\alpha < 0$ » $\mathcal{T} < 0$, » *résistant.*

Le travail est nul quand l'une des trois quantités F, MM', $\cos\alpha$ est nulle.

2° *Trajectoire quelconque.* Traçons Ox parallèle à la direction de la force, et supposons que le point d'application de la force décrive l'arc de courbe MM'.



Nous diviserons cet arc en arcs élémentaires tels que mm', que nous supposerons assez petits pour que l'on puisse substituer à ces arcs leurs cordes.

On appellera *travail élémentaire* le travail $F \times mm'.\cos\alpha$ et, par définition, on aura

$$\mathcal{T}_{MM'} = \lim \Sigma\, \tau_{mm'},$$

ou bien

$$\mathcal{T}_{MM'} = \lim \Sigma.F \times mm'.\cos\alpha = F.\lim \Sigma.mm'.\cos\alpha;$$

mais $\Sigma mm'.\cos\alpha$ est précisément la projection de l'arc MM' sur Ox et il vient finalement

$$\mathcal{T}_{MM'} = F \times \text{proj. du déplac}^{t} \text{ sur F.}$$

291. Force variable. — Considérons immédiatement le cas de la trajectoire quelconque. On partage l'arc MM' en arcs élémentaires tels que *mm'*, assez petits pour qu'on puisse leur substituer leurs cordes et, d'autre part, pour qu'on puisse considérer la force comme restant constante, pendant chacun de ces déplacements. Le travail *total* est, par définition, la limite vers laquelle tend la somme des travaux élémentaires.

Si plusieurs forces constantes ou variables sollicitent un point matériel, on démontre facilement le théorème suivant :

Le travail de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point est égal à la somme des travaux des composantes.

292. Unités de travail. — *Kilogrammètre.* — C'est le travail correspondant à un poids de 1 kilogramme qui déplacerait son point d'application de 1 mètre dans sa direction.

Erg. — C'est le travail d'une dyne, déplaçant son point d'application d'un centimètre dans sa direction.

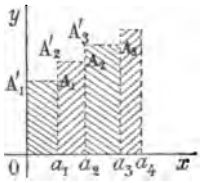
Joule. — Le joule vaut 10^7 ergs.

Unités de puissance. — L'unité de travail est indépendante du temps ; mais dans l'industrie on doit tenir compte de cet élément et l'on est amené à considérer un nouveau coefficient appelé la *puissance* et qui représente la quantité de travail produit pendant 1 seconde.

Cheval-vapeur. — Le cheval-vapeur, qui est l'unité vulgaire de puissance, est le travail de 75 kilogrammètres effectué en 1 seconde. Cette puissance équivaut à peu près à celle de 3 chevaux de trait.

Watt. — C'est le travail d'un *joule* débité en 1 seconde.

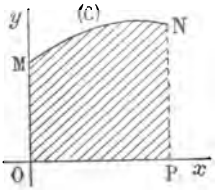
293. Représentation graphique du travail. — Nous avons vu que dans tous les cas, on avait pour expression du travail



$$\mathcal{T} = \lim.\ \Sigma F \cos \alpha . \overline{mm'}.$$

Ceci posé, construisons deux axes rectangulaires Ox, Oy ; portons en abscisses et bout à bout les cordes *mm'*, puis en ordonnées les produits $F \cos \alpha$ correspondants, nous obtiendrons ainsi des points représentatifs A_1, A_2, A_3, A_4, et nous aurons

$$\mathcal{T} = \lim.\ (\text{aire } Oa_1A_1A'_1 + \ldots + \text{aire } a_3a_4A_4A'_4).$$



Si maintenant l'on suppose que le nombre des travaux élémentaires croisse sans limite, les points A'_1, A'_2... formeront une courbe (C) et le travail $\mathcal{T}$ sera représenté par l'aire du trapèze mixtiligne OMNP.

La mesure de cette aire dépend du calcul intégral ; mais on pourra, en appliquant les procédés de *Simpson* et de *Poncelet*, en obtenir des valeurs approchées.

294. *Calculer le travail produit par une pression de 2 atmosphères s'exerçant sur un piston de 10 centimètres carrés de section et parcourant 2 décimètres.*

La pression d'une atmosphère sur 1 mètre carré équivaut à 10330 kilog.

D'autre part, la surface du piston exprimée en mètres carrés étant mesurée par le nombre 0,0010, nous aurons pour le travail demandé

$$\mathfrak{T} = 2 \times 10\,330 \times 0{,}001 \times 0{,}2,$$

ou bien

$$\mathfrak{T} = 4^{\text{kgm}},132.$$

295. *Calculer le rapport du kilogrammètre à l'erg.*

Nous avons symboliquement

$$1 \text{ (kilogrammètre)} = 1 \text{ (kilogramme)} \times 1 \text{ (mètre)};$$

mais

$$1 \text{ kilogramme} = 981 \times 10^3 \text{ dynes},$$

$$1 \text{ mètre} = 100 \text{ centimètres},$$

et il viendra en remplaçant,

$$1 \text{ kilogrammètre} = 981 \times 10^3 \text{ (dynes)} \times 100 \text{ (centimètres)},$$

ou bien

$$1 \text{ kilogrammètre} = 981 \times 10^5 \text{ ergs}.$$

Remarque. — Comme, par définition, le *joule* vaut 10^7 ergs, on a encore

$$1 \text{ kilogrammètre} = 9^{\text{joules}},81.$$

296. *Quel est le nombre de kilogrammètres nécessaires pour élever 190 centimètres cubes d'eau à 2 centimètres de hauteur?*

Nous avons

$$\mathfrak{T} = F \times h;$$

mais

$$F = 190^{\text{gr}} = 0^{\text{kg}},19,$$

$$h = 2^{\text{cm}} = 0^{\text{m}},02;$$

par conséquent il viendra, en remplaçant,

$$\mathfrak{T} = 0{,}19 \times 0{,}02 = 0^{\text{kilogrammètre}},0038.$$

297. *Un plan poli, incliné de* 30°, *a une longueur de* $2^{m},25$. 1° *Calculer le travail produit par un poids de* $9^{kg},5$ *abandonné sans vitesse initiale au sommet du plan ;* 2° *évaluer en chevaux-vapeur la puissance d'une machine qui accomplirait le même travail pendant le même temps.*

1° Nous avons $\mathfrak{T} = 9{,}5 \times 2{,}25 \times \cos 60°$,

ou bien

$$\mathfrak{T} = 9{,}5 \times 2{,}25 \times \frac{1}{2} = 10^{kgm},6875.$$

2° Si t est le temps employé par le corps pour descendre le plan, la puissance x, évaluée en chevaux-vapeur, d'une machine qui accomplirait le même travail pendant le même temps, sera donnée par

$$(1) \qquad x = \frac{10{,}6875}{75 \times t}.$$

Nous avons d'ailleurs, pour calculer t, la formule

$$2{,}25 = \frac{1}{2} g \sin 30°.t^2 = \frac{gt^2}{4},$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{9}{g}} = 0^{s},95.$$

Remplaçons dans (1), il viendra finalement,

$$x = \frac{10{,}6875}{75 \times 0{,}95} = 0^{\text{ch. vap.}},15.$$

298. *Un cheval est attelé à un manège de rayon* R ; *sachant qu'il exerce une traction de* F^{kg} *et qu'il travaille h heures par jour en faisant un tour en m minutes,*

1° *Calculer son travail quotidien ;*

2° *Évaluer en chevaux-vapeur la force d'une machine qui produirait le même travail pendant le même temps.*

Application. — $h = 8$, $m = \frac{1}{3}$, $R = 3^m,50$, $F = 45$.

1° Le cheval accomplit dans sa journée

$$\frac{60 \times h}{m} \text{ tours;}$$

or le travail qu'il produit pour un tour est $2\pi RF$; par suite, son travail quotidien sera exprimé par

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi . R . F . h . 60}{m} \text{ kilogrammètres.}$$

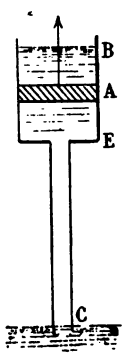
2° Le cheval-vapeur étant le travail de 75 kilogrammètres produit pendant une seconde, la force de la machine produisant, pendant le même temps le même travail, sera évaluée en chevaux-vapeur par

$$N = \frac{\mathfrak{T}}{75 \times h \times 60 \times 60} = \frac{2\pi . R . F}{m \times 75 \times 60}.$$

Application : $\mathfrak{T} = \pi \times 453600$ kilogrammètres.

$N = \pi \times 0,21$ cheval-vapeur.

299. *Dans une pompe aspirante et foulante, calculer la force à employer pour soulever le piston, et évaluer le travail accompli pendant la course ascensionnelle du piston.*



Application :

Section du piston = 200 *cent. carrés.*

» » *tube* = 50 » »

Hauteur d'élévation = 7^m;

Longueur du corps de pompe = 2^m.

H étant la pression atmosphérique évaluée en colonne d'eau, la face supérieure du piston supporte une pression $S(H + AB)$ dirigée vers le bas tandis que la face inférieure éprouve la pression $S(H - AC)$.

Par suite, la force nécessaire pour soulever le piston sera au moins égale à

$$F = S(H + AB) - S(H - AC) = S.CB.$$

Elle est indépendante de la position du piston.

Le travail nécessaire pour élever le piston de EB est donné par

$$\mathfrak{T} = S.CB.EB.$$

Application : $F = 2 \times 7 = 140^{kg}.$

$$\mathfrak{T} = 280 \text{ kilogrammètres}$$

300. *Un point qui se déplace sur une droite* AA', *est repoussé, proportionnellement à la distance, par un point* O *de cette droite. Calculer le travail de la force répulsive, pour un déplacement fini* M_0M *du point.*

1° Le segment M_0M ne contient pas le centre répulsif.

Posons $OM_0 = x_0$, $OM = x$ et soit kx la force répulsive pour la position M.

Divisons M_0M en n parties égales très petites h, nous aurons $nh = x - x_0$.

D'ailleurs, la force pouvant être considérée comme constante pour chacun de ces déplacements infinitésimaux, il viendra

$$\mathfrak{T} = \text{limite} \left\{ kx_0h + k(x_0 + h)h + \cdots + k(x_0 + \overline{n-1}.h)h \right\},$$

ou bien

$$\mathfrak{T} = \lim kh\left[nx_0 + h\frac{n(n-1)}{2}\right] = \lim khn\left[x_0 + \frac{hn}{2} - \frac{h}{2}\right].$$

Remplaçons hn par $x - x_0$, puis faisons tendre h vers zéro ; nous obtiendrons

$$\mathfrak{T} = \frac{k(x^2 - x_0^2)}{2}.$$

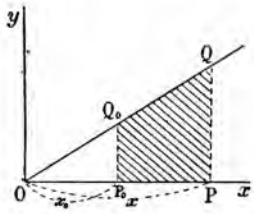
2° M_0 et M sont de part et d'autre du centre répulsif. Nous avons dans ce cas

$$\mathfrak{T}_{M_0M} = \mathfrak{T}_{M_0O} + \mathfrak{T}_{OM};$$

mais $$\mathfrak{T}_{M_0O} = -\frac{kx_0^2}{2}, \qquad \mathfrak{T}_{OM} = \frac{kx^2}{2},$$

donc $$\mathfrak{T}_{M_0M} = \frac{k(x^2 - x_0^2)}{2}.$$

L'expression du travail est donc la même, quelles que soient les positions extrêmes M_0M sur la droite AA'.



On arrive plus rapidement à ce résultat en représentant le travail par une aire.

Effectivement, considérons deux axes rectangulaires xOy ; portons en abscisses les déplacements et en ordonnées les forces ; le lieu des points ainsi représentés a pour équation $y = kx$, c'est donc une droite passant par l'origine.

Nous avons d'ailleurs

$$\mathcal{T} = \text{aire trapèze } P_0Q_0QP,$$

ou bien

$$\mathcal{T} = \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2).$$

Remarque. — Comme on le verrait sans difficulté, si la force était attractive le travail aurait pour expression

$$\mathcal{T} = -\frac{k}{2}(x^2 - x_0^2).$$

301. *Un point* M, *assujetti à se déplacer sur une droite* Ox, *est attiré par l'origine* O *suivant la loi newtonienne. Évaluer le travail de cette attraction pour un déplacement fini* A_0A *du point* M.

Posons $OA_0 = r_0$, $OA = r$ et partageons A_0A en segments croissant en progression géométrique ; ainsi, si $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$ sont les points de division, nous aurons

$$OA_1 = qr_0, \qquad OA_2 = q^2r_0, \ldots \qquad OA_{n-1} = q^{n-1}r_0,$$
$$OA = q^n r_0 = r;$$

la raison sera donc $q = \sqrt[n]{\frac{r}{r_0}}$.

Si q est suffisamment voisin de 1, les intervalles seront assez petits, et la force attractive sera sensiblement constante pour chacun des déplacements élémentaires.

Nous aurons donc, si $\frac{k}{r_0^2}$ est la force attractive au point A,

$$\tau_{AA_1} = \frac{-k}{q^2 r_0^2}(qr_0 - r_0) = -\frac{k}{r_0}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^2}\right),$$

$$\tau_{A_1A_2} = \frac{-k}{q^4 r_0^2}(q^2 r_0 - qr_0) = -\frac{k}{r_0}\left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3}\right),$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\tau_{A_{n-1}A} = \frac{-k}{q^{2n} r_0^2}(q^n r_0 - q^{n-1} r_0) = -\frac{k}{r_0}\left(\frac{1}{q^n} - \frac{1}{q^{n+1}}\right);$$

d'où, en additionnant,

$$\Sigma\tau = -\frac{k}{r_0}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n} - \frac{1}{q^{n+1}}\right) = -\frac{k}{r_0}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^{n+1}}\right),$$

ou bien encore

$$\Sigma\tau = -\frac{k}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\sqrt[n]{\frac{r_0}{r}}.$$

Faisons croître n indéfiniment, il viendra

$$\lim \sqrt[n]{\frac{r_0}{r}} = 1$$

et par suite

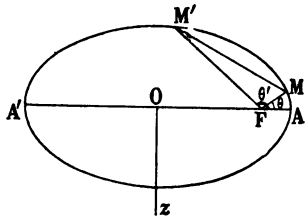
$$\mathfrak{T} = \left(\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}\right).$$

Remarque. — Si la force était répulsive, on obtiendrait pareillement

$$\mathfrak{T} = -\left(\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}\right).$$

302. *On donne dans un plan vertical une ellipse dont le grand axe est horizontal. Calculer le travail de la pesanteur sur un point matériel qui décrit un arc* MM′ *donné de la courbe.*

D'après ce que nous savons sur le travail d'une force constante, nous avons



$\mathfrak{T} = P \times$ proj. de MM' sur Oz ;

mais

$$(MM') = (FM') - (FM),$$

ou bien, en posant

$$\widehat{MFA} = \theta, \qquad \widehat{M'FA} = \theta',$$
$$FM = \rho, \qquad FM' = \rho',$$

$$(MM')_{oz} = \rho' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta'\right) - \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \rho \sin\theta - \rho' \sin\theta';$$

nous aurons donc $\mathfrak{T} = P(\rho \sin\theta - \rho' \sin\theta')$.

Or, l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires s'écrit

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

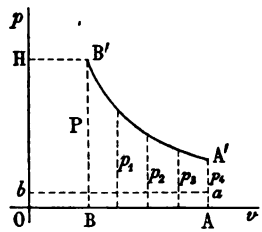
et il viendra

$$\mathfrak{T} = Pp\left(\frac{\sin\theta}{1 + e\cos\theta} - \frac{\sin\theta'}{1 + e\cos\theta'}\right).$$

303. *Calculer la force théorique en chevaux-vapeur d'une machine à vapeur à détente et condensation, fonctionnant dans les conditions suivantes : 1° le volant calé sur l'arbre de couche fait* 2100 *tours à l'heure ; 2° le diamètre du cylindre est de* $0^m,60$ *; la course du piston est de* 1^m *; la pression de la vapeur à son arrivée dans le cylindre est égale à* 5 *atmosphères; la pression au condenseur est* $0^{atm},4$ *; la détente se fait au tiers.*

(*Brev. de l'ens. spécial, Aix, 1880.*)

Construisons deux axes rectangulaires Ov, Op. Si nous portons en abscisses des quantités proportionnelles aux volumes et en ordonnées les pressions, nous aurons comme diagramme le contour mixtiligne HB'A'.



Le segment HB' correspond à la vapeur qui agit à pleine pression P ; nous avons alors $OB = \frac{1}{3}$ en prenant comme unité le mètre ; et la courbe B'A' correspond à la

détente que nous supposons s'effectuer suivant la loi de Mariotte.

Par conséquent, en posant

$$P = \pi \times \overline{0,3}^2 \times 5^{\text{atm.}} = \pi \times \overline{0,3}^2 \times 5 \times 10\,336,$$

l'aire OHB'A'AO représentera le travail de la pression.

Portons $Aa = 0^{\text{atm.}},4 = \frac{2}{25}P$, la contre-pression due au condenseur sera mesurée par l'aire du rectangle $OAabO$.

Or, nous avons

$$OBB'H = \frac{P}{3}, \qquad OAab = \frac{2P}{25}.$$

Évaluons maintenant l'aire BAA'B'; pour cela, nous diviserons BA en quatre parties égales à $\frac{1}{6}$ et nous prendrons comme valeur approchée la somme des trapèzes rectilignes obtenus en traçant des ordonnées par les points de division.

Ces ordonnées étant P, p_1, p_2, p_3, p_4, nous aurons, en vertu de la loi de Mariotte,

$$P\frac{1}{3} = p_1\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = p_2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = p_3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = p_4;$$

d'où nous tirons

$$p_1 = \frac{2}{3}P, \qquad p_2 = \frac{P}{2}, \qquad p_3 = \frac{2}{5}P, \qquad p_4 = \frac{P}{3}.$$

La somme des aires des trapèzes étant

$$\frac{1}{6}\left[\frac{P + p_1}{2} + \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_2 + p_3}{2} + \frac{p_3 + p_4}{2}\right],$$

nous obtiendrons, en remplaçant,

$$\frac{67}{180}P.$$

Le travail résultant à chaque course simple du piston sera donc

$$\frac{P}{3} + \frac{67}{180}P - \frac{2}{25}P = \frac{563}{900}P,$$

ou bien $$\frac{563}{900}\pi.\overline{0,3}^2.5.10336.$$

Comme pendant 1 heure il y a 2100 tours de volant, il y aura 4200 coups de piston ; par conséquent, nous aurons en évaluant le travail en chevaux-vapeur,

$$\frac{\pi.563.\overline{0,3}^2.10336.5.4200}{900.75.3600} = 141 \text{ ch. vap.}$$

EXERCICES

294. — Calculer le travail nécessaire pour élever de 1 décimètre un corps pesant $5^{kg},025$.

295. — On laisse tomber un poids de 10^{kg} d'une hauteur de $9^{m},809$.
1° Calculer en kilogrammètres le travail produit par la pesanteur ;
2° Calculer en chevaux-vapeur la force d'une machine capable d'effectuer le même travail pendant le même temps.

296. — Un cheval attelé à un manège travaille 8 heures par jour et exerce une traction de 35 kilogrammes ; il fait 9 tours en 3 minutes sur une piste de 3 mètres de rayon ; calculer le travail qu'il effectue en 1 minute.

297. — On lance un projectile pesant $0^{kg},250$ avec une vitesse de 200^{m} et dans une direction faisant 45° avec l'horizon.
Calculer le travail de la pesanteur depuis le départ jusqu'au sommet de la trajectoire.

298. — Un plan est incliné de 30° sur l'horizon ; un corps de 10^{kg}, abandonné au sommet sans vitesse initiale, effectue dans sa descente un travail de 50^{kgm}. Calculer la longueur du plan incliné.

299. — Un manœuvre agissant sur une manivelle de $0^{m},30$ fait faire à celle-ci 30 tours par minute. Quel sera le travail transmis à la manivelle dans cet intervalle de temps, sachant que le moteur développe un effort moyen de 8^{kg} ?

300. — On veut élever avec une grue, en 3 minutes, à la hauteur de $3^m,45$, une pierre pesant $2\,000^{kg}$. Les rayons du cylindre et de la manivelle sont longs de $0^m,36$ et de $0^m,70$. On demande de calculer en chevaux-vapeur l'importance du moteur.

301. — Quelle est en chevaux-vapeur la puissance du moteur nécessaire pour faire marcher une pompe dont le piston a $0^m,10$ de rayon, $0^m,35$ de course, avec une vitesse de 15 oscillations doubles par minute, sachant que la hauteur totale de la colonne d'eau est de 10^m ?

302. — Une machine à vapeur met en jeu un système de pompes qui élèvent l'eau d'un fleuve à 155^m de hauteur pour l'alimentation d'une ville. On demande de calculer le rendement de ce système de pompes, en supposant :

1° Que la force de la machine mesurée sur l'arbre de couche soit de 1 500 chevaux-vapeur ;

2° Que les réservoirs de la ville reçoivent 30 000 mètres cubes en 24 heures. (*Concours général.*)

303. — Un cylindre dans lequel peut se mouvoir un piston, contient un gaz qui, occupant la moitié du cylindre, est à une pression de 10^{atm} ; de l'autre côté du piston s'exerce la pression atmosphérique ; on laisse le gaz se détendre et l'on demande le travail de détente, connaissant la longueur 50^{cm} du cylindre et sa section 1 décimètre carré.

304. — Un cylindre de $0^m,50$ de diamètre renferme un piston dont la course est $1^m,80$. Ce piston éprouve sur une face la tension 6 atm. d'un gaz.

Calculer le travail qui correspond à chaque coup de piston :

1° En supposant qu'il n'y ait pas de détente ;

2° En supposant qu'il y ait détente aux 2/5 de la course.

305. — Un point matériel décrit une circonférence verticale de rayon 2^m, avec la vitesse angulaire constante 2 ; calculer le travail de la pesanteur pendant 2 secondes de mouvement.

306. — Une hélice est tracée sur un cylindre de révolution à axe vertical ; un point matériel *pesant*, soumis à l'action d'une force constante horizontale décrit cette courbe. On demande de calculer la somme des travaux des forces quand le point décrit une spire de l'hélice.

307. — On donne dans un plan vertical une parabole dont l'axe est horizontal. Calculer le travail de la pesanteur sur un point matériel qui décrit un arc de la courbe.

F étant le foyer de la parabole, et MM′ l'arc considéré, on choisira comme données les angles que forment FM et FM′ avec l'axe de la courbe.

308. — Une machine à vapeur, fonctionnant sans condenseur et sans détente, fait 50 tours par minute quand la vitesse de régime est atteinte. Sachant en outre que le piston de cette machine a une surface de $3^{dmq},1416$ et que sa course est de 40^{cm}, on demande d'exprimer la puissance de la machine en chevaux, la pression de la vapeur étant égale à 6 atmosphères. Que deviendrait l'expression de cette puissance si la machine était munie d'un condenseur où la tension de la vapeur atteindrait $\frac{1}{10}$ d'atmosphère ?

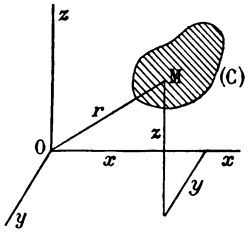
(*Bacc. lettres-math., Constantine, 1895.*)

CHAPITRE V

MOMENTS D'INERTIE

304. Le moment d'inertie d'un point de masse m par rapport à un point, un axe ou un plan est le produit mr^2, r étant sa distance au point, à l'axe ou au plan. Le moment d'inertie d'un système est la somme des moments d'inertie des points matériels qui le constituent ; il aura donc pour expression Σmr^2.

Imaginons trois axes rectangulaires auxquels nous rapporterons l'espace, et soit un solide (C).



Soit I_o son moment d'inertie par rapport à l'origine, nous aurons

$$I_o = \Sigma mr^2,$$

mais $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

donc

$$I_o = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 + \Sigma mz^2,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad I_o = I_{oxy} + I_{oyz} + I_{ozx}.$$

305. *Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un point est donc égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans rectangulaires, d'ailleurs quelconques, passant par le point.*

On a aussi

$$I_o = \Sigma m(x^2 + y^2) + \Sigma mz^2,$$

ou

$$(2) \qquad I_o = I_{oz} + I_{oxy}.$$

Enfin on peut encore écrire

$$\Sigma m(x^2 + y^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2,$$

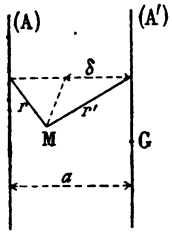
ou bien

$$(3) \qquad I_{oz} = I_{oyz} + I_{ozx}.$$

Les relations (1), (2), (3) sont particulièrement utiles quand le système admet des axes ou des plans de symétrie.

306. Théorème. — *Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle et passant par le centre de gravité, augmenté de* Ma^2, M *étant la masse du système et a la distance des deux axes.*

Soient I_A, $I_{A'}$ les moments d'inertie du système par rapport aux axes parallèles (A), (A'), ce dernier contenant le centre de gravité G.



Nous avons

$$I_A = \Sigma mr^2, \qquad I_{A'} = \Sigma mr'^2;$$

mais $$r^2 = r'^2 + a^2 - 2a\delta,$$

d'où $$mr^2 = mr'^2 + ma^2 - 2ma\delta;$$

donc $$\Sigma mr^2 = \Sigma mr'^2 + \Sigma ma^2 - 2a\Sigma m\delta,$$

ou bien $$I_A = I_{A'} + Ma^2 - 2a\Sigma m\delta.$$

Appliquons le théorème des moments par rapport au plan passant par (A') et perpendiculaire au plan (AA'). $\Sigma m\delta$ étant précisément la somme des moments des poids des points matériels et le poids résultant ayant un moment nul puisque (A') contient G, nous aurons $\Sigma m\delta = 0$.

Il reste donc

$$I_A = I_{A'} + Ma^2.$$

Corollaire. — Parmi tous les axes parallèles à une droite, celui pour lequel le moment d'inertie est minimum est l'axe qui passe par le centre de gravité.

307. *Moment d'inertie d'une barre rectiligne homogène :*

1° *par rapport à une extrémité ;*

2° *par rapport à son milieu.*

1° Divisons la barre en n parties égales assez petites pour être assimilables, sans erreur appréciable, à des points matériels ; l'élément situé entre la $k^{ième}$ et la $(k+1)^{ième}$ division sera sensiblement distant de l'extrémité de $\frac{k}{n}\,l$, si l est la longueur de la barre, et comme celle-ci est homogène, la masse de chaque élément sera $\frac{M}{n}$, la barre étant de masse M. Le moment d'inertie de cet élément sera donc $\frac{M}{n}\,\frac{k^2}{n^2}\,l^2$. Par suite, la somme des moments d'inertie de tous ces éléments s'écrira

$$\frac{M}{n}\frac{1^2}{n^2}l^2+\frac{M}{n}\frac{2^2}{n^2}l^2+\cdots+\frac{M}{n}\frac{n^2}{n^2}l^2$$
$$=\frac{M}{n^3}l^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2),$$

ou bien

$$\frac{M}{n^3}l^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Augmentons indéfiniment le nombre des divisions ; cette expression deviendra, pour $n=\infty$,

$$\frac{Ml^2}{3}.$$

2° Si I est son moment d'inertie par rapport à son centre de gravité nous aurons, d'après un théorème précédent,

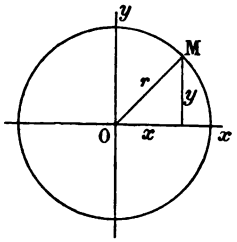
$$\frac{Ml^2}{3}=\frac{Ml^2}{4}+I,$$

d'où

$$I=\frac{Ml^2}{12}.$$

308. *Moment d'inertie d'une circonférence :*
1° *par rapport à son centre ;*
2° *par rapport à un diamètre.*

1° Tous les points de la circonférence étant équidistants du centre, si R et M représentent son rayon et sa masse, il viendra



$$\Sigma mr^2=R^2\Sigma m=MR^2.$$

2° Le moment d'inertie par rapport à un diamètre quelconque est évidemment le même.

Or, soient deux diamètres rectangulaires Ox, Oy ; nous avons

$$I_{Ox}=\Sigma my^2,\qquad I_{Oy}=\Sigma mx^2$$

et

$$I_{Ox}+I_{Oy}=\Sigma m(x^2+y^2)=\Sigma mr^2=MR^2;$$

or,

$$I_{Ox}=I_{Oy},$$

donc

$$I_{Ox}=\frac{MR^2}{2}.$$

309. *Moment d'inertie de la surface d'une sphère :*
1° *par rapport à son centre ;*
2° *par rapport à un diamètre ;*
3° *par rapport à un plan diamétral.*

On trouve, en raisonnant comme plus haut,

1° MR^2 ;

2° $\frac{MR^2}{3}$;

3° $\frac{2MR^2}{3}$.

310. *Moment d'inertie d'un cercle :*
1° *par rapport à son centre ;*
2° *par rapport à un diamètre.*

1° Partageons le cercle en n parties au moyen de circonférences concentriques de rayons

$$\frac{R}{n}, \frac{2R}{n}, \ldots k\frac{R}{n}, \ldots \frac{(n-1)R}{n}.$$

L'anneau compris entre les circonférences de rayons $\frac{kR}{n}$, $(k+1)\frac{R}{n}$ a pour surface $\frac{\pi R^2}{n^2}(2k+1)$ et pour masse $\frac{M}{n^2}(2k+1)$, M étant celle du cercle ; son moment d'inertie aura donc pour expression

$$\frac{M}{n^2}(2k+1).k^2\frac{R^2}{n^2} = \frac{MR^2}{n^4}(2k^3+k^2),$$

et il viendra

$$\frac{MR^2}{n^4}\sum_{k=1}^{k=n}(2k^3+k^2) = \frac{MR^2}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].$$

Faisons tendre n vers l'infini, nous aurons pour le moment d'inertie du cercle

$$\frac{MR^2}{2}.$$

2° On trouve sans difficulté pour le moment d'inertie par rapport à un diamètre,

$$\frac{MR^2}{4}.$$

EXERCICES

309. — Calculer le moment d'inertie du périmètre d'un rectangle par rapport à son centre.

310. — Évaluer le moment d'inertie de la surface d'un rectangle par rapport à l'un de ses côtés.

311. — Calculer le moment d'inertie d'un cercle par rapport à un point de la circonférence.

312. — Évaluer le moment d'inertie du périmètre d'un polygone régulier par rapport à son centre.

313. — Moment d'inertie du volume d'un cylindre droit de révolution par rapport à son axe.

314. — Moment d'inertie du volume d'une sphère :
1° par rapport à son centre ;
2° par rapport à un diamètre ;
3° par rapport à un plan diamétral.

CHAPITRE VI

THÉORÈME DES FORCES VIVES. PENDULE. VOLANTS.

---

311. On appelle *force vive* d'un point à l'instant t le produit de sa masse par le carré de la vitesse qu'il possède à cet instant; en la représentant par 2T, nous avons donc $2T = mv^2$.

La force vive d'un système est la somme des forces vives de ses points matériels, de sorte que l'on a $2T = \Sigma mv^2$.

On donne quelquefois à la quantité T le nom de *puissance vive*.

312. *Force vive d'un système animé d'un mouvement de translation.*

Chacun des points du système ayant même vitesse v, nous aurons

$$2T = mv^2 + m'v^2 + m''v^2 + \ldots$$

ou bien

$$2T = Mv^2,$$

M étant la masse totale.

313. *Force vive d'un système animé d'un mouvement de rotation.*

Soit ω la vitesse angulaire du système; la vitesse de tout point situé à la distance r de l'axe étant $r\omega$, nous aurons

$$2T = mr^2\omega^2 + m'r'^2\omega^2 + \ldots = \omega^2\Sigma mr^2,$$

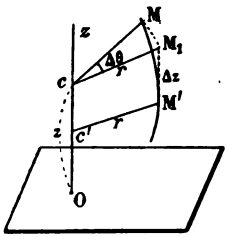
ou enfin, en représentant par I le moment d'inertie Σmr^2 du système par rapport à l'axe,

$$2T = I\omega^2.$$

314. *Force vive d'un solide dont deux points décrivent une droite fixe.*

En vertu de la liaison, le solide pourra tourner autour de Oz et glisser le long de cet axe. Sa position sera d'ailleurs connue avec celle de l'un quelconque de ses points, non situé sur l'axe. Or on peut passer de l'une à l'autre position d'un point, ou plus généralement du solide lui-même, en

lui imprimant une rotation $\Delta\theta$ autour de Oz, puis une translation Δz parallèle à cet axe. Si nous distinguons les points M du solide par leur cote z au-dessus d'un plan fixe perpendiculaire à Oz, leur distance r à cet axe et l'angle du plan MOz avec un plan fixe passant par l'axe, la vitesse v d'un point quelconque sera la résultante des deux vitesses $r\theta'$ et z' perpendiculaires ; on aura donc



$$v^2 = r^2\theta'^2 + z'^2,$$

et il viendra

$$2T = \Sigma m(r^2\theta'^2 + z'^2) = I\theta'^2 + Mz'^2,$$

M étant la masse du solide et I son moment d'inertie par rapport à Oz.

Théorème des forces vives.

315. 1° Cas du point matériel. — *Un point se déplaçant sous l'action de certaines forces, la demi-variation de force vive de ce point est égale au travail des forces pendant la durée du déplacement.*

2° Cas d'un système. — *La somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur les différents points d'un système matériel, pendant un intervalle de temps donné, est égale à la demi-variation de sa force vive.*

En résumé, on a dans le premier cas

$$\frac{1}{2}(mv^2 - mv_0^2) = \mathcal{T},$$

et dans le cas du système

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2) = \Sigma\mathcal{T}.$$

Le travail total $\Sigma\mathcal{T}$ se compose du travail $\Sigma\mathcal{T}_i$ des forces intérieures et du travail $\Sigma\mathcal{T}_e$ des forces extérieures; (1) pourra donc s'écrire encore

$$\frac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2) = \Sigma\mathcal{T}_e + \Sigma\mathcal{T}_i,$$

ou bien

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \Sigma\mathcal{T}_i = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \Sigma\mathcal{T}_e,$$

$\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ porte le nom d'*énergie actuelle* (ou de mouvement) ;

$-\Sigma\mathcal{T}_i$ — d'*énergie potentielle* (ou de position) ;

$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \Sigma\mathcal{T}_i$ — d'*énergie totale*.

Principe de conservation de l'énergie. — Si le système est isolé, c'est-à-dire à l'abri des actions extérieures, $\Sigma\mathcal{T}_e$ est nul et l'équation (2) nous montre que l'*énergie totale* du système conserve la même valeur.

Volants.

316. Un volant est une grande roue massive calée sur l'arbre de couche d'une machine. Il a pour but de faciliter la mise en train de la machine, d'en régulariser le mouvement, c'est-à-dire de resserrer les limites de la vitesse. Considérons donc une machine et soient

$\mathcal{T}_m$ le travail moteur, $\mathcal{T}_r$ le travail résistant;

nous aurons

$$\Sigma\mathcal{T} = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r.$$

Appelons ω' et ω'' les valeurs maxima et minima de la vitesse angulaire ω de l'arbre de couche; la vitesse moyenne sera $\frac{\omega' + \omega''}{2} = \omega_1$.

Il viendra donc, en négligeant la masse des organes de la machine devant celle du volant,

$$(1) \qquad \frac{1}{2} \text{ variation force vive du volant } = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r.$$

Or, pour simplifier, nous supposerons que le volant est une roue de rayon R et dont la masse M est uniformément répartie sur sa circonférence; alors la force vive du volant sera $MR^2\omega^2$ et nous obtiendrons en remplaçant dans (1),

$$\frac{1}{2} MR^2(\omega'^2 - \omega''^2) = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r,$$

d'où

$$\omega' - \omega'' = \frac{2(\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r)}{MR^2(\omega' + \omega'')} = \frac{\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r}{MR^2\omega_1}.$$

Nous voyons ainsi qu'un volant sera d'autant plus efficace que sa vitesse angulaire sera grande et que son moment d'inertie MR^2 sera grand.

Il est à remarquer cependant que toute augmentation de R peut rendre le volant encombrant et qu'en augmentant la masse M, on accroît les résistances passives.

Pendule.

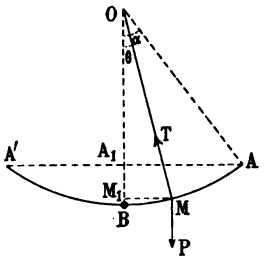
317. *Pendule simple.* — Le pendule simple est constitué par un point matériel M attaché à l'extrémité d'un fil OM inextensible et fixé en O.

Supposons qu'on abandonne le pendule sans vitesse de la position OA, faisant l'angle α avec la verticale OB; le point M décrira, sous l'action de son poids, un arc de circonférence de centre O et de rayon $OA = l$.

Étudions son mouvement.

Les forces qui agissent sur M sont : son poids $P = mg$ et la tension T du fil.

Par suite, si v est sa vitesse en M, la variation de sa puissance vive sera



$\frac{1}{2}mv^2$, puisque $v_0 = 0$; d'autre part, T étant normale à la trajectoire a un travail nul et le travail de P pour le déplacement AM sera $P.\overline{A_1M_1}$, ou bien $mgl(\cos\theta - \cos\alpha)$. L'équation des forces vives s'écrira donc

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Ceci posé, supposons que α et, par suite, θ soient très petits; nous pourrons, sans erreur appréciable, remplacer $\cos\theta$ et $\cos\alpha$ par $1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $1 - \frac{\alpha^2}{2}$; il viendra donc

$$(1) \qquad v^2 = gl(\alpha^2 - \theta^2).$$

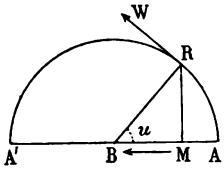
Cette formule nous montre que le mouvement du pendule est symétrique par rapport à la verticale OB. Étant parti de A sans vitesse, il arrivera jusqu'en A' où sa vitesse sera nulle, puis parcourra l'arc A'BA de la même façon, etc.

En résumé, le mouvement de M est oscillatoire.

Proposons-nous de calculer la durée T d'une oscillation, c'est-à-dire le temps employé par M pour décrire l'arc ABA'.

Pour cela, nous ferons usage de l'artifice suivant dû à Huyghens. Rectifions l'arc ABA' et conservons les mêmes lettres; décrivons sur le segment rectiligne ABA' comme diamètre, une demi-circonférence. Le point M décrit ce diamètre avec la vitesse v, exprimée par (1).

Soit w la vitesse du point R, qui décrit la demi-circonférence de façon à se projeter à chaque instant en M sur AA'; nous aurons



$$v = w \sin u,$$

ou

$$v^2 = w^2(1 - \cos^2 u);$$

mais

$$\cos^2 u = \frac{\overline{BM}^2}{\overline{BA}^2} = \frac{l^2\theta^2}{l^2\alpha^2} = \frac{\theta^2}{\alpha^2},$$

et il viendra

$$gl(\alpha^2 - \theta^2) = w^2\,\frac{\alpha^2 - \theta^2}{\alpha^2},$$

d'où

$$w = \alpha\sqrt{gl}.$$

Nous voyons ainsi que le point R se meut uniformément; par suite, comme il décrira la demi-circonférence pendant que M décrira le diamètre AA', c'est-à-dire pendant le temps T, nous aurons

$$\text{arc ARA}' = w.T,$$

d'où

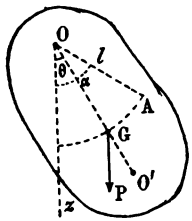
$$T = \frac{\pi l\alpha}{\alpha\sqrt{gl}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

T étant indépendant de l'amplitude 2α de l'oscillation, on dit que les petites oscillations du pendule simple sont *isochrones*.

Quand les oscillations ne sont pas petites, on trouve

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right].$$

318. *Pendule composé.* — Le pendule composé est constitué par un corps solide pesant tournant autour d'un axe horizontal.



Le centre de gravité G du solide décrit un cercle vertical; prenons le plan de ce cercle pour plan de figure et soit O la trace de l'axe de rotation.

Le théorème des forces vives nous donnera, comme dans le cas du pendule simple,

$$\frac{1}{2}\,\Sigma mv^2 = Pl(\cos\theta - \cos\alpha);$$

mais (313) $$\frac{1}{2}\,\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\,Mk^2.\omega^2,$$

Mk^2 étant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation, et ω sa vitesse angulaire; nous aurons donc

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\,k^2.\omega^2 = gl(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Or, considérons le point O' situé sur la droite OG à la distance $OO' = l' = \frac{k^2}{l}$; ce point aura pour vitesse $v = l'\omega$, et nous aurons, en remplaçant dans (3),

$$\frac{1}{2}\,k^2 \cdot \frac{v^2}{l'^2} = g\,\frac{k^2}{l'}\,(\cos\theta - \cos\alpha),$$

ou bien $$v^2 = 2gl'\,(\cos\theta - \cos\alpha).$$

C'est précisément l'équation du mouvement du pendule simple; par conséquent le point O' oscille comme s'il était libre et suspendu par un fil au point O. La parallèle à l'*axe de suspension* menée par O', s'appelle *axe d'oscillation*, et $l' = \frac{k^2}{l}$ est la longueur du pendule simple *synchrone*.

La durée des oscillations du pendule composé et celle du pendule simple synchrone sont les mêmes.

Remarque. — On a $OO' > OG$.

En effet, si $M\rho^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe parallèle à l'axe de suspension et passant par G, on a (306)

$$Mk^2 = M\rho^2 + Ml^2,$$

ou $$k^2 = \rho^2 + l^2,$$

d'où $$l' = \frac{k^2}{l} = l + \frac{\rho^2}{l}.$$

Cette relation donne une nouvelle expression de la longueur du pendule simple synchrone.

319. *Un corps du poids de* 75^{kg} *tombe, d'une hauteur de* $1^m,30$, *sur un sol qui oppose à la continuation de son mouvement une résistance constante de* 5000^{kg}. *Jusqu'à quelle profondeur s'y enfoncera-t-il?*

(*Bacc., Lille, 1883.*)

Le corps arrive au sol avec une vitesse v, donnée par

$$(1) \qquad v^2 = 2ge = 2g \times 1^m,30.$$

Appliquons le théorème des forces vives à son mouvement dans le sol; nous aurons

$$\frac{1}{2}\frac{75}{g}v^2 = x \times 5000,$$

ou bien, en vertu de (1),

$$75 \times 1^m,30 = 5000 \times x,$$

d'où nous tirons

$$x = \frac{75 \times 1^m,3}{5000} = 0^m,0195.$$

320. *Un clou est enfoncé dans un mur qui offre une résistance moyenne de* 150^{kg}. *Un poids* P *tombant sur ce clou avec une vitesse de* 2^m *le fait enfoncer de* $0^m,00136$. *Calculer* P.

Le théorème des forces vives nous donne, en négligeant la masse du clou devant celle du poids P,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot 4 = 150 \times 0,00136,$$

d'où nous tirons

$$P = \frac{150 \times 0,00136 \times g}{2},$$

ou bien

$$P = 1^{kg}.$$

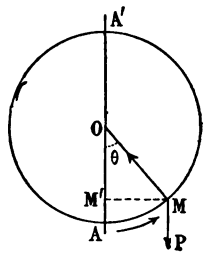
321. *Une circonférence de* 3^m *de rayon est située dans un plan vertical. Un mobile, partant de son point le plus bas, est lancé avec une vitesse* v_0. *Quelle doit être cette vitesse pour que le mobile assujetti à décrire cette courbe, puisse atteindre le point le plus haut?*

Cette vitesse dépendra-t-elle du poids du mobile?

Qu'adviendra-t-il selon que la vitesse initiale sera plus grande ou plus petite que la vitesse trouvée?

(*Bacc. lettres-sc.*, *Alger*, *1895*.)

La force vive du point est mv^2 ou $\frac{P}{g}v^2$.



Les forces qui agissent sur lui sont son poids P et la réaction de la circonférence.

Cette force de liaison étant normale à la courbe a un travail nul ; quant au travail du poids P il a pour expression $-P.\overline{AM'} = -P.l(1-\cos\theta)$, l étant le rayon de la circonférence.

Par conséquent, le théorème des forces vives nous donnera

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgl(1-\cos\theta),$$

d'où nous tirons

$$v^2 = v_0^2 - 2gl(1-\cos\theta).$$

D'ailleurs, pour que le mobile puisse occuper la position définie par $\widehat{MOA} = \theta$, il faut

$$v_0^2 - 2gl(1-\cos\theta) \geqslant 0,$$

d'où $$v_0^2 \geqslant 2gl(1-\cos\theta).$$

Par suite, le mobile pourra atteindre la position la plus élevée A', si l'on a

$$v_0^2 \geqslant 4gl.$$

En résumé, quand nous aurons

$v_0 < 2\sqrt{gl}$ le mobile n'atteindra pas A'.

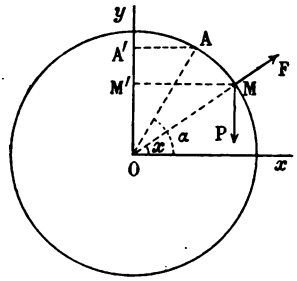
$v_0 = 2\sqrt{gl}$ » arrivera en A' et y restera.

$v_0 > 2\sqrt{gl}$ » parcourra la circonférence et ne s'arrêtera jamais.

322. *Un point matériel de masse m glisse sur une circonférence située dans un plan vertical. Ce point partant d'une position*

donnée A *sur la circonférence, sans vitesse initiale et sous l'action de son poids, on demande en quel point il quittera la circonférence.*

Le point étant d'abord assujetti à se déplacer sur la circonférence, se trouve soumis à la force centrifuge F.



Pour que ce point, primitivement posé en A, n'abandonne pas la courbe, il faut que la résultante des deux forces F et P l'appuie sur la circonférence, c'est-à-dire que la projection de cette résultante sur le rayon OM soit dirigée vers O.

A l'instant où cette projection sera nulle, le mobile abandonnera la courbe. Soit M cette position limite; nous aurons

$$(1) \qquad F = P \sin x = mg \sin x,$$

mais

$$F = \frac{mv^2}{R};$$

d'autre part, le théorème des forces vives nous donne

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg\,\overline{A'M'} = mgR\,(\sin\alpha - \sin x),$$

d'où

$$F = \frac{mv^2}{R} = 2mg\,(\sin\alpha - \sin x),$$

et il viendra, en substituant dans (1),

$$2(\sin\alpha - \sin x) = \sin x.$$

Cette équation nous fournit

$$\sin x = \frac{2}{3} \sin\alpha.$$

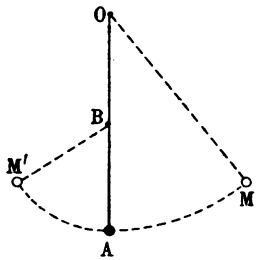
323. *Un pendule* OA, *qui bat la seconde quand il oscille librement, est constitué par une masse pesante* A, *suspendue à l'extré-*

mité d'un fil flexible. En B, *on place un clou qui force le pendule, quand il est à gauche de la verticale, à prendre la forme* OBM'.

Sachant que le clou est à une distance OB *de l'axe de suspension égale à la demi-longueur du pendule, on demande quelle sera la nouvelle durée d'une oscillation du pendule.*

(*Bacc. ès sciences, Marseille, 1886.*)

Les oscillations du pendule simple étant supposées isochrones, on sait que la durée t d'une oscillation est donnée par la formule



$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

D'après l'hypothèse, le pendule OA battant la *seconde*, on a

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Le pendule considéré décrit d'abord l'arc AM de centre O, pendant $\frac{1}{2}$ seconde, puis l'arc AM' de centre B, pendant le temps

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{2g}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Par conséquent, la nouvelle durée d'une oscillation du pendule sera

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0^{\text{sec}},853.$$

324. *Mouvement dans la machine d'Atwood.* — Supposons la machine réduite à une poulie de rayon R, sur la gorge de laquelle s'engage un fil sans poids, supportant à ses extrémités les poids P et $P+p$.

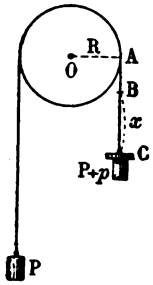
Posons $BC = x$, B étant la position initiale du poids $P+p$.

Quand la poulie tourne de $\Delta\theta$, la longueur des brins du fil varie de $R.\Delta\theta$; on a donc

$$\Delta x = R.\Delta\theta,$$

d'où $$x' = R\omega,$$

ω étant la vitesse angulaire de la poulie.



Ceci posé, nous aurons pour la force vive et le travail des forces extérieures :

	Forces vives	Travaux
P	$\frac{P}{g}x'^2$,	$-Px$
P + p	$\frac{P+p}{g}x'^2$,	$(P+p)x$,
poulie	$I\omega^2 = I\frac{x'^2}{R^2}$,	0.

Le travail du poids de la poulie est nul, car on sait que le travail de la pesanteur sur un solide est le même que celui de son poids total, agissant en son centre de gravité.

Le théorème des forces vives nous donnera donc

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\left[\frac{2P+p}{g}+\frac{I}{R^2}\right]x'^2 = px,$$

d'où $$x'^2 = \frac{2p}{\frac{2P+p}{g}+\frac{I}{R^2}}x;$$

en comparant cette formule à la suivante

$$v^2 = 2\gamma h,$$

on voit que le mouvement du poids $P+p$ est uniformément accéléré, l'accélération étant, d'ailleurs,

$$\gamma = \frac{p}{\frac{2P+p}{g}+\frac{I}{R^2}}.$$

On peut aussi constater ce fait en prenant la dérivée de (1) ; il vient

$$\left[\frac{2P+p}{g}+\frac{I}{R^2}\right]x'' = p;$$

or x'' est l'accélération du poids $P+p$; elle est constante et nous retrouvons bien, pour son expression, celle déjà écrite.

On a évidemment $\gamma < g$, ce qui justifie le but de l'appareil.

325. *A l'une des extrémités d'une corde s'enroulant sur un treuil, on attache un corps de poids* P. *Le système partant du repos se met en mouvement sous l'action du poids* P.

1° *Étudier ce mouvement.*

2° *Quel volant faut-il caler sur l'arbre du treuil, pour que sa vitesse angulaire soit diminuée de moitié?*

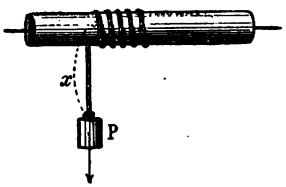
1° Soient I le moment d'inertie du treuil par rapport à son axe, r son rayon, ω sa vitesse angulaire.

A la distance x de l'axe du treuil, nous avons

force vive du poids $P = \frac{P}{g} x'^2$;

force vive du treuil $= I\omega^2 = I \frac{x'^2}{r^2}$; $(r\omega = x')$

travail de P $= Px$.



Par suite, l'équation des forces vives s'écrira

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g} x'^2 + \frac{Ix'^2}{r^2}\right) = Px,$$

d'où $$x'^2 = \frac{2P}{\frac{P}{g} + \frac{I}{r^2}} x.$$

Le carré de la vitesse du poids P étant proportionnel à l'espace, son mouvement est uniformément accéléré.

2° Soit J le moment d'inertie du volant calé sur le treuil; l'équation des forces vives s'écrira

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g} x'^2 + \frac{Ix'^2}{r^2} + \frac{J}{r^2} x'^2\right) = Px,$$

d'où nous tirons

$$x'^2 = \frac{2P}{\frac{P}{g} + \frac{I+J}{r^2}} x;$$

et, pour que dans ce cas, la vitesse soit pour chacune des positions, moitié de la vitesse du système dépourvu de volant, il faudra

$$\frac{2P}{\frac{P}{g}+\frac{I+J}{r^2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2P}{\frac{P}{g}+\frac{I}{r^2}},$$

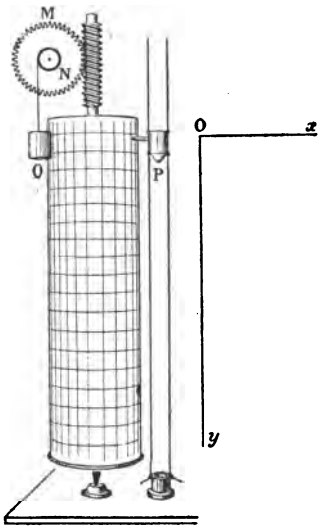
d'où
$$J=3r^2\left(\frac{P}{g}+\frac{I}{r^2}\right).$$

326. *On supprime dans une machine de Morin, le moulin à ailettes. On recommence ensuite les expériences. Quel est alors le chemin décrit par le crayon sur la feuille de papier qui enveloppe le cylindre?*

(*Bacc. ès sciences, Dijon, 1892.*)

Soient Q le poids moteur du cylindre et P le poids cylindro-conique qui porte la pointe traçante.

Appelons I le moment d'inertie par rapport à son axe, du treuil N accompagné de la roue dentée avec laquelle il est invariablement lié; soit aussi K le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe.



A l'instant t, le poids Q étant situé à la distance y du point de départ, sa vitesse sera y' et nous aurons

$$\text{Puiss}^{\text{ce}}\text{ vive de } Q=\frac{Q}{2g}y'^2.$$

Or, ω étant la vitesse angulaire du treuil et r son rayon, nous avons

$$r\omega=y';$$

par suite, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\text{Puissance}\\ \text{vive du treuil}\end{array}\right\}=\frac{I}{2r^2}y'^2;$$

enfin comme la vitesse angulaire du cylindre est aussi dans un rapport constant avec ω,

c'est-à-dire avec y', nous pourrons écrire

$$\text{Puissance vive du cylindre} = \frac{K}{2k^2}\, y'^2,$$

k étant une constante qui dépend de l'engrenage formé par la roue dentée M et la vis sans fin.

Ceci posé, l'équation des forces vives nous donnera pour le mouvement du système précédent

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{g} + \frac{I}{r^2} + \frac{K}{k^2}\right) y'^2 = Qy,$$

équation que nous pouvons écrire plus simplement

$$y'^2 = 2Hy,$$

H étant une constante.

Par conséquent (188), le mouvement de Q, ou bien encore celui du cylindre, est uniformément accéléré.

Il en est d'ailleurs de même pour le poids P.

Donc la courbe tracée sur la feuille de papier développée résulte de la composition de deux mouvements uniformément accélérés, sans vitesse initiale, suivant Ox et Oy ; cette courbe se réduit à une droite passant par le point O, et cette droite s'enroule, comme on sait, pour donner une *hélice*.

327. *Mouvement d'un disque circulaire homogène pesant, situé dans un plan vertical et roulant, sans glisser, sur une droite de ce plan.*

Les forces qui, pendant le mouvement, agissent sur le disque sont son poids $P = mg$ et la réaction R du plan; mais le déplacement infinitésimal du disque étant une rotation ω autour du centre instantané H, le travail élémentaire de R est nul.

Appliquons le théorème des forces vives, il viendra

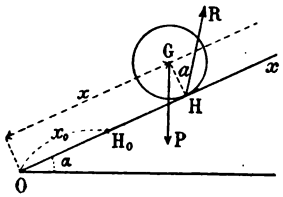
$$(1) \qquad \frac{1}{2}(I\omega^2 - I\omega_0^2) = -mg \sin\alpha(x - x_0),$$

I étant le moment d'inertie du cercle par rapport au point H.

Calculons ω, pour cela égalons les deux expressions de la vitesse du centre G; nous aurons

$$a\omega = x',$$

car le déplacement de G est le même que celui du point de contact H; d'autre part, on a (306), (310),



$$I = \frac{ma^2}{2} + ma^2 = \frac{3}{2}ma^2.$$

Substituons dans (1), nous obtiendrons

$$x'^2 - x_0'^2 = \frac{4}{3}g \sin\alpha(x_0 - x).$$

Prenons les dérivées des deux membres, il viendra

$$2x'x'' = -\frac{4}{3}g \sin\alpha . x',$$

d'où

$$x'' = -\frac{2}{3}g \sin\alpha.$$

Le mouvement de G étant rectiligne, l'accélération est la dérivée x'' de la vitesse; par suite, le point G se déplace d'un mouvement uniformément varié, l'accélération étant $\frac{2}{3}g \sin\alpha$. Ce mouvement sera retardé quand il s'effectuera dans le sens Ox et accéléré dans le cas contraire.

Enfin, comme le cercle roule sans glisser sur Ox, un point fixe quelconque de sa circonférence a tourné autour de G d'un arc égal à H_0H et le disque tourne autour de son centre d'un mouvement uniformément varié.

328. *Étudier le mouvement d'un point* M *assujetti à décrire une droite* xx' *et repoussé, proportionnellement à la distance, par un point* O *de cette droite.*

Posons $OM = x$, et soit kx la force répulsive; cette dernière expression sera légitime si nous adoptons sur $x'x$ une direction, celle de Ox, par exemple.

Appliquons le théorème des forces vives, en nous reportant plus haut à l'expression déjà trouvée du travail de la force répulsive, il viendra $\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)$,

d'où $$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x^2 - x_0^2) + v_0^2}.$$

Pour choisir le signe du radical, plaçons-nous à l'origine du mouvement, faisons $x = x_0$, nous trouverons

$$v = \pm v_0.$$

I. — *La vitesse initiale est nulle.* — Le point part du repos et il est clair, dans ce cas, qu'il se dirigera constamment suivant Ox ou suivant Ox', suivant le signe de x_0.

D'ailleurs, comme nous avons

$$v^2 = \frac{k}{m}(x^2 - x_0^2),$$

la vitesse en valeur absolue croîtra constamment et indéfiniment.

II. — *La vitesse initiale est dirigée suivant* Ox'. — Cette fois, nous devrons choisir le signe — devant le radical et nous aurons

$$v = -\sqrt{\frac{k}{m}x^2 - \left(\frac{k}{m}x_0^2 - v_0^2\right)}.$$

1°.— $\frac{k}{m}x_0^2 - v_0^2 < 0$. — v ne pouvant pas s'annuler et étant négative, x décroît constamment, le mobile se déplace donc dans le sens Ox'. Si $x_0 > 0$, $|v|$ diminue quand x décroît de x_0 à 0, puis augmente indéfiniment quand x tend vers $-\infty$ Le mobile passe donc par le centre répulsif avec une vitesse minima. Si $x_0 < 0$, la vitesse croît constamment en valeur absolue à mesure que le mobile s'éloigne du point O.

2°.— $\frac{k}{m}x_0^2 - v_0^2 = 0$. — $v = -\sqrt{\frac{k}{m}x^2}$.

Si $x_0 < 0$, le mobile se déplace dans le sens Ox' avec une vitesse indéfiniment croissante; au contraire, si $x_0 > 0$, x diminue, et le mobile arrive au point O avec une vitesse nulle et il y reste en repos, puisque la force répulsive est nulle.

3°. — $\frac{k}{m}x_0^2 - v_0^2 > 0$. — Posons, pour abréger l'écriture, $\frac{k}{m}x_0^2 - v_0^2 = \frac{k}{m}h^2$, nous aurons

$$v = -\sqrt{\frac{k}{m}(x^2 - h^2)}.$$

On voit d'ailleurs que l'on a $h^2 < x_0^2$.

Donc si $x_0 < 0$, comme x décroît, v ne pourra pas s'annuler et le mobile se déplacera sur Ox' avec une vitesse croissante.

Si $x_0 > 0$, x diminuant, v s'annulera pour $x = h$, puis le mobile se dirigera d'un mouvement accéléré suivant Ox; sa vitesse sera alors donnée par la formule $v = \sqrt{\frac{k}{m}(x^2 - h^2)}$.

III. — *La vitesse initiale est dirigée suivant* Ox. — Dans ce cas v est positive et nous devrons prendre le signe $+$. Nous aurons donc

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 + v_0^2 - \frac{k}{m}x_0^2}.$$

Le mouvement, qui dépend du signe du binome $v_0^2 - \frac{k}{m}x_0^2$, s'étudie comme dans le cas II.

EXERCICES

315. — Un corps pesant 10^{kg} tombe dans le vide d'une hauteur de 10^m. Quelle est sa force vive quand il arrive au sol?

316. — Un poids de 2^{kg} tombe verticalement de 500^m, avec une vitesse initiale de 20^m; il s'enfonce de $0^m,02$ dans le sol. Calculer la résistance moyenne du sol.

317. — Vérifier le théorème des forces vives dans le mouvement d'un corps sur un plan incliné poli.

318. — Un projectile de 25^{gr} est placé dans une arme de $1^{m},25$ de long. A sa sortie, sa vitesse est de 100^{m}. En supposant que la durée d'action de la poudre soit connue, quel travail a effectué la poudre, dont on suppose l'action constante pendant ce temps?

(*Saint-Cyr, 1889.*)

319. — Soient un cercle O et un diamètre vertical AB. Trouver un rayon OC tel qu'un poids mette trois fois plus de temps pour aller de O en C que de A en B. Combien y a-t-il de solutions?

(*Saint-Cyr, 1889.*)

320. — Quel temps mettrait le pendule pour aller du point le plus élevé au point le plus bas, en suivant la corde au lieu de l'arc?

(*Saint-Cyr, 1889.*)

321. — Deux points pesants égaux, assujettis à se mouvoir sur la circonférence d'un cercle vertical, partent d'un même point avec des vitesses égales, mais à des instants différents. Démontrer que la droite qui les joint à une époque quelconque enveloppe une circonférence.

322. — Trois pendules sont abandonnés ensemble en partant du point P; le premier, long de $4^{m},48$, décrit l'arc PA; le deuxième, long de $5^{m},67$, décrit l'arc PB situé dans le même plan; le troisième se meut dans un plan perpendiculaire suivant PC. On demande quelle doit être sa longueur pour que les trois pendules se retrouvent ensemble au point P. Après combien d'oscillations et à quel intervalle de temps cette rencontre aura-t-elle lieu?

(*Conc. École des Mines de Saint-Etienne, 1884*)

323. — Un mouton destiné à battre des pilots pèse 134^{kg}. Il est soulevé le long d'une sonnette au moyen d'une corde de $0^{m},032$ d'épaisseur, qui passe sur une poulie de renvoi placée à la partie supérieure de la sonnette et s'enroule sur un treuil horizontal de $0^{m},19$ de diamètre, muni à ses deux extrémités de manivelles de $0^{m},43$ de long, sur lesquelles agissent deux ouvriers. Le mouton soulevé à une hauteur de $4^{m},16$, retombe par son poids sur un pieu, qu'il enfonce verticalement de $0^{m},31$ dans le sol.

Déterminer l'effort de chaque ouvrier employé à soulever le mouton et la résistance opposée par le sol à la pénétration du pieu.

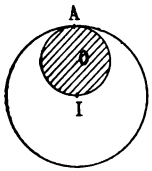
(*Brevet, Douai, 1878.*)

324. — Un angle droit et isocèle AOA′, tourne dans son plan

autour de son sommet O. En A et A′ sont deux poids P, P′. Étudier le mouvement de ce système.

Cas particulier des petites oscillations et de $P = P'$.

325. — On donne dans un plan vertical, un disque circulaire O fixe et de rayon R. Sur ce disque repose en A, une circonférence métallique homogène I, de rayon 2R.



On écarte très peu cette circonférence de sa position d'équilibre; en supposant qu'elle roule, sans glisser, sur le disque O, on demande :

1° D'écrire l'équation des forces vives;

2° De calculer le temps d'une oscillation, qui est supposée, comme nous l'avons dit, de faible amplitude.

326. — On donne dans un plan vertical un disque circulaire. Une barre AB, de masse négligeable, repose en son milieu sur le disque.

Cette barre porte à ses extrémités des poids égaux P.

On l'écarte un peu de sa position d'équilibre, et on suppose que dans son mouvement, elle roule, sans glisser, sur le disque.

1° Calculer sa force vive.

2° Évaluer le travail des poids P.

3° Écrire l'équation des forces vives.

327. — Dans un plan vertical, une barre AB, rectiligne, homogène, pesante, se meut autour de son extrémité A.

Trouver la longueur du pendule simple synchrone.

328. — On donne dans un plan vertical, un parallélogramme ABCD articulé, homogène et pesant.

Le milieu O de AB étant supposé fixe, on écarte la figure de sa position d'équilibre. Calculer :

1° Le travail de la pesanteur;

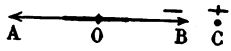
2° La force vive du système;

3° Écrire l'équation des forces vives.

329. — On laisse tomber un corps librement dans le vide, en un point du globe où le pendule simple, qui effectue une oscillation simple par seconde, a une longueur de 99^{cm}. On demande de calculer le temps qui sépare l'instant où l'on abandonne le corps, de celui où il a une vitesse de 20^{m} par seconde.

(*Bacc. lettres-sc.*, *Dijon*, *1895*.)

330. — On a une aiguille aimantée AB, mobile autour d'un axe vertical O, et un pôle aimanté C placé à une petite distance du pôle B, de telle façon que l'action de A soit insensible. On fait faire de petites oscillations à l'aiguille, en l'écartant de sa position d'équilibre, d'abord en l'absence du pôle C, et ensuite en sa présence. Soient n, n' les nombres d'oscillations à la minute dans les deux cas; soit G l'intensité de l'action terrestre sur le pôle B, estimée horizontalement. On demande quelle est l'intensité de la force d'attraction des pôles A et B. On admet que le mouvement autour de l'axe se fait sans frottement et que les oscillations sont assez petites pour que les attractions de B sur C soient parallèles.



(*Bacc. lettres-sc., Lyon, 1895.*)

CHAPITRE VII

PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

---

329. Les forces en action sur un système de points peuvent se diviser en deux catégories :

1° Les forces *données* ; 2° les forces *de liaison*, qui résultent de la façon dont les points matériels sont gênés.

Le *principe du travail virtuel* ou *des vitesses virtuelles* s'énonce comme il suit :

Pour qu'un système matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels des FORCES DONNÉES, *pour tout déplacement virtuel du système compatible avec les liaisons, soit nulle.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME. — *Pour tout déplacement, virtuel et compatible avec les liaisons, d'un système matériel, la somme des travaux virtuels des forces de liaison est nulle.* (On suppose qu'il n'y a pas de frottement).

Ce lemme ne se démontre pas ; il résulte de vérifications.

Arrivons maintenant à la démonstration du principe.

1° *La condition est nécessaire.* Soit un point M_1 du système; il est soumis à deux forces : une force donnée F_1 et une force de liaison F'_1.

Or, le point étant en équilibre, F_1 et F'_1 sont égales et directement opposées; par suite, pour tout déplacement virtuel, on a

$$\text{trav. de } F_1 + \text{trav. de } F'_1 = 0\,;$$

on aura de même

$$\text{trav. de } F_2 + \text{trav. de } F'_2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{trav. de } F_n + \text{trav. de } F'_n = 0\,;$$

d'où, en ajoutant ces égalités membre à membre,

$$\text{Somme trav. forces données} + \text{Somme trav. forces liaison} = 0\,;$$

mais, d'après le lemme, le deuxième terme du premier membre est nul et il reste

$$\text{Somme trav. forces données} = 0.$$

2° *La condition est suffisante.* Supposons qu'il n'y ait pas équilibre ; le système étant primitivement en repos se mettrait en mouvement en respectant les liaisons.

Il y aurait, par suite, production de forces vives, et on aurait, d'après le principe des forces vives,

$$\text{Somme trav. forces données} + \text{Somme trav. forces liaison} > 0,$$

ou, en vertu du lemme,

$$\text{Somme trav. forces données} > 0,$$

conclusion contraire à l'hypothèse.

Le principe des vitesses virtuelles a été énoncé par J. Bernoulli.

330. *La figure d'équilibre d'un système matériel, soumis à l'unique action extérieure de la pesanteur, est celle qui donne au centre de gravité une position la plus basse ou la plus élevée.*

Considérons le système matériel dans sa position d'équilibre ; soient p_1, p_2, ... p_n les poids de ses divers éléments et z_1, z_2, ... z_n les cotes des centres de gravité respectifs, comptées relativement à un plan horizontal donné (H).

Donnons-lui maintenant un déplacement quelconque très petit, compatible avec les liaisons, et soient

$$z_1 + \Delta z_1, \qquad z_2 + \Delta z_2, \qquad \ldots, \qquad z_n + \Delta z_n$$

les nouvelles cotes des centres de gravité des éléments.

Si Z et $Z + \Delta Z$ désignent les cotes du centre de gravité du système dans ses deux positions, nous aurons, en appliquant le théorème des moments par rapport au plan (H),

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + \cdots + p_n z_n = (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)Z,$$

$$p_1(z_1 + \Delta z_1) + \cdots + p_n(z_n + \Delta z_n) = (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)(Z + \Delta Z);$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$p_1 \Delta z_1 + p_2 \Delta z_2 + \cdots + p_n \Delta z_n = (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)\Delta Z.$$

Le système étant en équilibre dans sa première position, le principe du travail virtuel nous donne

$$p_1 \Delta z_1 + p_2 \Delta z_2 + \cdots + p_n \Delta z_n = 0.$$

Par conséquent, le produit $(p_1 + p_2 + \ldots p_n)\Delta Z$, qui est l'expression du travail du poids total appliqué au centre de gravité G du système, est nul, et le déplacement très petit du

centre de gravité est horizontal. En d'autres termes, la tangente à la courbe lieu de G, est horizontale, de sorte que la cote de G est maxima ou minima.

Remarque. — On démontre en outre qu'il y a *stabilité* ou *instabilité*, suivant que la cote du centre de gravité est *minima* ou *maxima*.

331. *Conditions d'équilibre du point matériel.*

Soit un point M, soumis à l'action des forces F_1, F_2, ... F_n, dont les projections sur trois axes rectangulaires fixes, $Oxyz$ sont (X_1, Y_1, Z_1), ... (X_n, Y_n, Z_n).

Imprimons au point un déplacement virtuel très petit MM′; si h, k, l sont les projections de ce déplacement sur les axes, nous aurons l'égalité géométrique

$$(\overline{MM'}) = (h) + (k) + (l).$$

D'autre part, nous avons

$$\mathfrak{T}.F_1 = \mathfrak{T}.X_1 + \mathfrak{T}.Y_1 + \mathfrak{T}.Z_1,$$

ou bien

$$\mathfrak{T}.F_1 = hX_1 + kY_1 + lZ_1.$$

L'application du principe des travaux virtuels nous donnera donc

$$\Sigma\mathfrak{T}.F_1 = 0,$$

ou

$$h\Sigma X_1 + k\Sigma Y_1 + l\Sigma Z_1 = 0.$$

Cette relation devant avoir lieu quel que soit le déplacement MM′, c'est-à-dire quels que soient h, k, l, entraîne

$$\Sigma X_1 = 0, \qquad \Sigma Y_1 = 0, \qquad \Sigma Z_1 = 0.$$

D'où les conditions déjà connues : *Pour qu'un point matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que les sommes des projections des forces qui le sollicitent, sur trois axes rectangulaires soient nulles.*

332. *Conditions d'équilibre d'un corps solide dont deux points sont assujettis à décrire une même droite fixe.*

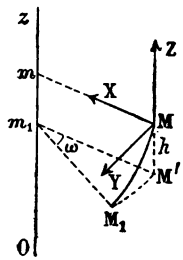
Soit Oz la droite fixe; le solide peut tourner autour de Oz, et aussi glisser le long de cet axe. Donnons au solide un déplacement virtuel, compatible avec cette liaison, et soit M_1 la nouvelle position que prend un point quelconque M.

On peut amener le solide de la première à la seconde position en lui imprimant un glissement $h = MM'$, suivant Oz et le faisant ensuite tourner de $\omega = \widehat{M'm_1M_1}$.

Ceci posé, soit F une force appliquée au point M, et appelons X, Y, Z ses composantes suivant la perpendiculaire Mm à Oz, la perpendiculaire au plan Mmz et la parallèle à Oz.

Nous avons pour tout déplacement

$$\mathcal{T}_F = \mathcal{T}_X + \mathcal{T}_Y + \mathcal{T}_Z.$$



Mais

$\mathcal{T}_X = 0$, car X est normale à l'arc MM_1,

$\mathcal{T}_Z = h.Z$,

$\mathcal{T}_Y = Y.M'M_1 = Y.mM.\omega = m^t_{oz}F \times \omega$.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit, d'après le principe des travaux virtuels, que

$$\Sigma\mathcal{T}_F = 0,$$

ou bien

$$h(Z + Z' + Z'' + \cdots) + \omega(m^t_{oz}F + m^t_{oz}F' + \cdots) = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu pour *tout* déplacement compatible avec la liaison, c'est-à-dire quelles que soient h et ω, et nous obtenons par suite

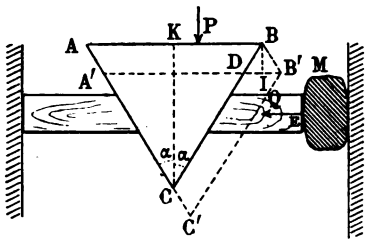
$$Z + Z' + Z'' + \cdots = 0,$$

$$m^t_{oz}F + m^t_{oz}F' + \cdots = 0.$$

Donc *pour qu'un solide assujetti à se mouvoir autour et le long d'un axe soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections des forces données sur l'axe, et la somme des moments des forces par rapport à cet axe soient séparément nulles.*

333. *Équilibre du coin isocèle.* — Soit un coin dont la section droite est le triangle isocèle ABC et posons $\widehat{ACB} = 2\alpha$.

L'effort ou puissance P s'exerce normalement à la face AB du prisme, et nous supposerons que la résistance Q est parallèle à AB.



Ceci posé, si nous imprimons au coin un déplacement virtuel de façon qu'il vienne en A'B'C', la puissance aura pour travail $P.\overline{BI}$ et le travail de Q, d'ailleurs résistant, aura pour expression

$$-Q.\overline{B'D} = -2Q.\overline{B'I}.$$

Le principe du travail virtuel nous donnera donc

$$P.\overline{BI} - 2Q.\overline{B'I} = 0,$$

d'où
$$\frac{P}{Q} = 2\,\frac{B'I}{BI} = 2\,\mathrm{tg}\,\widehat{B'BI}.$$

Or, la figure ABB'A' est un parallélogramme, BB' est parallèle à AA' et nous avons

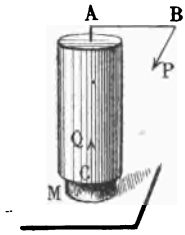
$$\widehat{B'BI} = \alpha,$$

de sorte que nous aurons finalement

$$\frac{P}{Q} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Par conséquent, plus le coin sera aigu, moins devra être grande la puissance à exercer pour vaincre une résistance donnée.

334. *Équilibre de la vis de pression.* — La puissance P s'exerce normalement au plan de la manivelle et de l'axe de rotation de la vis, et nous supposerons la direction de la résistance Q parallèle à cet axe.



Ceci posé, faisons tourner la manivelle AB de ε et soit x le déplacement correspondant de C, nous aurons

Travail de $P = P.\overline{AB}.\varepsilon = Pl\varepsilon$,

Travail de $Q = -Qx$;

et il viendra $Pl\varepsilon - Qx = 0$.

Or, si h est le *pas* de la vis, nous avons

$$\frac{x}{h} = \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

d'où

$$x = \frac{h\varepsilon}{2\pi};$$

nous obtiendrons donc

$$Pl\varepsilon - \frac{Qh\varepsilon}{2\pi} = 0,$$

d'où finalement

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi l}$$

EXERCICES

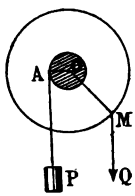
Appliquer le principe du travail virtuel à l'étude des exercices suivants :

331. — Équilibre du levier.

332. — Équilibre de la poulie fixe et de la poulie mobile.

333. — Équilibre du treuil différentiel.

334. — Équilibre de la balance de Quintenz.



335. — En quel point M de la roue d'un treuil différentiel faut-il suspendre un poids $Q = 30^{kg}$, pour soulever un poids $P = 100^{kg}$, sachant que $OA = 0^{m},10$, $OM = 0^{m},50$?

(*Bacc., Oran, 1895.*)

336. — Un angle droit homogène pesant, dont les côtés ont pour longueurs a et b, repose tangentiellement sur la circonférence d'un cercle vertical et fixe. Trouver sa position d'équilibre. — Stabilité.

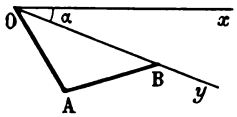
337. — Un disque elliptique homogène, pesant, repose tangentiel-

lement sur les côtés Ox, Oy d'un angle droit fixe et situé dans un plan vertical. Trouver sa position d'équilibre.

338. — Un point assujetti à rester sur une ellipse polie, est sollicité par deux forces constantes Φ, Φ' dirigées respectivement vers les foyers. Trouver les positions d'équilibre du point.

339. — Un point assujetti à rester sur une parabole polie, est sollicité par deux forces : la première, d'intensité Φ, est dirigée vers le foyer, la seconde de même intensité est perpendiculaire à l'axe de la courbe. Position d'équilibre du point.

340. — On donne dans un plan vertical une horizontale Ox et une droite fixe Oy, telle que $\widehat{xOy} = \alpha$.



Un angle OAB articulé en A est fixé en O, et B porte un anneau dans lequel passe Oy.

Sachant que les deux tiges OA, AB sont égales, homogènes et pesantes, on demande de trouver la position d'équilibre de ce système articulé.

341. — La section droite d'un coin est un triangle ABC, rectangle en A, et dans lequel on a $AB = 30^{cm}$, $BC = 50^{cm}$. La face verticale AB du coin glisse contre un plan fixe et la face hypoténuse BC agit sur une pièce horizontale mobile, chargée de comprimer un corps.

Calculer la pression que subit le corps, sachant que l'effort exercé normalement à AC est de 50^{kg}.

342. — Position d'équilibre d'un point pesant M, placé sur un plan incliné poli, et attiré par le sommet O du plan, proportionnellement à la distance.

CHAPITRE VIII

TRANSMISSION DU TRAVAIL DANS LES MACHINES

335. Si nous appliquons le théorème des forces vives à une machine, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_r. \tag{1}$$

$\mathfrak{T}_m$ étant le travail des forces motrices et $\mathfrak{T}_r$ étant celui des résistances.

Ceci posé, nous distinguerons trois cas :

I. *Machine en état de mouvement uniforme.* — Le premier membre de l'équation (1) est nul et nous avons

$$\mathfrak{T}_m = \mathfrak{T}_r.$$

Par conséquent, *pendant un intervalle de temps quelconque*, le travail résistant est égal au travail moteur.

II. *Machine ayant un mouvement périodique.* — Alors au bout d'intervalles de temps égaux (périodes), chacun des organes de la machine passe au même endroit, avec la même vitesse. Dans ce cas, si nous considérons ce qui se passe pendant un *nombre entier de périodes*, nous avons encore

$$\mathfrak{T}_m = \mathfrak{T}_r.$$

III. *Machine ayant un mouvement quelconque.* — Considérons la machine depuis le moment de *la mise en train* jusqu'à l'époque de *l'arrêt* ; comme, à ces instants, les vitesses des organes sont nulles, nous arriverons à la même conclusion

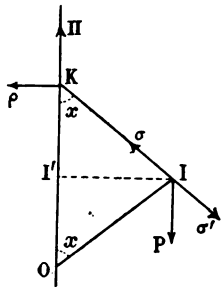
$$\mathfrak{T}_m = \mathfrak{T}_r.$$

Ce principe, qui est une conséquence du théorème des forces vives appliqué aux systèmes, se vérifie sans difficulté dans le cas des machines simples.

336. *Une machine se compose de deux tiges rigides, de longueur égale* OI, IK, *articulées sans frottement en* I; *la première peut tourner librement autour du point fixe* O, *et l'extrémité* K *de la seconde peut glisser librement sur la verticale du point* O, *dont elle ne peut s'écarter. La résistance est un poids* P, *attaché en* I, *et la puissance* Π, *appliquée en* K, *est dirigée suivant la verticale. Trouver la condition d'équilibre de cette machine, et prouver que quand elle est remplie, le travail moteur est égal au travail résistant.*

(*Bacc. ès sciences, Dijon.*)

1° En K s'exerce la réaction normale ρ à Oz de cette verticale; à la charnière I agissent les actions σ, σ', égales et directement opposées.



D'ailleurs, en vertu de l'équilibre de OI, il faut que les forces P et σ, qui sollicitent l'extrémité I de OI, admettent une résultante passant par O; pareillement, σ' devra passer par K. Nous aurons donc, en prenant les moments par rapport à O,

$$m^t P + m^t \sigma = 0,$$

ou
$$P.\overline{OI} \sin x - \sigma.2\overline{OI}.\cos x.\sin x = 0,$$

ou bien encore

$$(1) \qquad P - 2\sigma \cos x = 0.$$

Les trois forces Π, ρ, σ' se faisant équilibre, il viendra, en projetant sur Oz,

$$(2) \qquad \Pi = \sigma' \cos x = \sigma \cos x;$$

par conséquent, (1) et (2) nous donneront, après élimination de $\cos x$,

$$(3) \qquad P = 2\Pi.$$

Telle est la condition d'équilibre.

2° Supposons la machine en équilibre et donnons-lui un

déplacement, en faisant, par exemple, tourner OI autour de O ; nous aurons en valeur absolue

$$\text{Trav. de P} = \text{P} \times \text{déplac}^{t} \text{ de I}',$$
$$\text{Trav. de } \Pi = \Pi \times \text{déplac}^{t} \text{ de K};$$

mais $$\text{OK} = 2\text{OI}',$$
$$\text{déplac}^{t} \text{ de K} = 2 \text{ déplac}^{t} \text{ de I}';$$

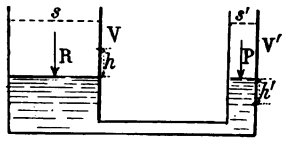
par suite, $$\text{Trav. de } \Pi = \Pi \times 2 \text{ déplac}^{t} \text{ de I}',$$

ou bien enfin, en vertu de (3),

$$\text{Trav. de } \Pi = \frac{\text{P}}{2} \times 2 \text{ déplac}^{t} \text{ de I}' = \text{Trav. de P}.$$

337. *Vérifier le principe de la transmission du travail dans la presse hydraulique.*

Essentiellement, la presse hydraulique se compose de deux vases communicants V, V′ ; dans le cylindre le plus petit V′ s'exerce la puissance P, normalement à la surface du liquide tandis que la résistance R s'exerce dans les mêmes conditions sur le liquide du cylindre V.



D'après le principe de Pascal, nous avons pour l'équilibre

$$\frac{\text{P}}{s'} = \frac{\text{R}}{s}.$$

Or, donnons un déplacement virtuel h' au point d'application de P ; le liquide s'élèvera de h dans V, et nous aurons

$$sh = s'h',$$

d'où $$\text{P}h' = \text{R}h,$$

c'est-à-dire $$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_r.$$

EXERCICES

343. — Vérifier l'égalité du travail moteur et du travail résistant dans le treuil différentiel, supposé animé d'un mouvement uniforme.

344. — Même question pour la chèvre.

345. — Même question pour la poulie mobile.

346. — Condition d'équilibre de la vis, déduite du principe de l'égalité du travail moteur et du travail résistant.

(*Bacc. ès sciences, Marseille.*)

347. — Le filet d'une vis porte 150 spires sur une hauteur de 36^{cm}. Quelle puissance faut-il appliquer à une distance de 2^{m} de l'axe, pour faire équilibre à un poids d'une tonne appliqué sur la tête de la vis ?

Calculer le travail développé pour élever ce poids d'une tonne à 14^{cm} de hauteur, et vérifier sur l'exemple proposé le principe de l'égalité du travail de la puissance et de la résistance.

(*Conc. acad., Bordeaux, 1869.*)

348. — Un poids P est soutenu sur un plan incliné, par une corde parallèle à celui-ci, et enroulée sur un treuil qui est fixé au sommet de ce plan, aux horizontales duquel son axe est parallèle.

On donne les rayons R et r de la roue et du treuil, et l'on demande de déterminer l'inclinaison que doit avoir le plan, pour que le poids P soit maintenu en équilibre par une force donnée F, qui agit tangentiellement à la roue.

Donner l'expression du travail développé par cette force F pendant un tour entier du treuil, et vérifier sur cet exemple le principe de la transmission du travail.

(*Conc. acad., Bordeaux, 1870.*)

349. — On a une combinaison de quatre treuils successifs, dans chacun desquels le rayon de la roue est égal à cinq fois celui du cylindre. Quelle est la force qui, tirant sur le premier treuil, peut faire équilibre à un poids Q de $1\,875^{kg}$ soutenu par le dernier ?

Trouver le travail de la puissance, quand on élève le poids Q à 2^{m} de hauteur, et vérifier le principe de l'égalité du travail moteur et du travail résistant.

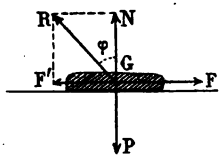
(*Conc. acad., Bordeaux, 1868.*)

350. — Vérifier le principe de l'égalité entre le travail moteur et le travail résistant, dans le *genou isocèle* (169).

CHAPITRE IX

FROTTEMENT

338. Pour définir ce qu'on entend par *frottement de glissement* ou simplement *frottement*, imaginons un corps placé sur un plan horizontal dépoli et sollicité par une force horizontale F. Si le plan était poli, il opposerait une réaction normale et le corps se mettrait en mouvement. Dans le cas contraire, il oppose une réaction oblique GR qui varie avec F de façon à maintenir l'équilibre, du moins dans de certaines limites.



Par exemple, si l'on fait croître graduellement F depuis zéro jusqu'à une certaine valeur Φ, le corps reste en repos ; si F dépasse Φ, le corps se met en mouvement.

Ainsi quand F a crû depuis zéro jusqu'à Φ, la réaction GR a varié en grandeur et direction, de façon à équilibrer, à chaque instant, les deux forces F et P.

On a d'ailleurs, pour l'équilibre

$$F = R \sin \varphi, \qquad P = R \cos \varphi :$$

d'où

$$F = P \operatorname{tg} \varphi.$$

Il y aura équilibre pour

$$F \leqslant \Phi.$$

Quand $F = \Phi$, l'angle φ a une valeur maxima qu'on appelle *angle du frottement* et $\operatorname{tg} \varphi$ a reçu le nom de *coefficient de frottement*. On voit ainsi que la *force du frottement* Φ est égale au produit de la pression normale par le coefficient de frottement.

Coulomb, après de nombreuses expériences, a énoncé les lois suivantes.

339. Lois du frottement au départ.

1° *Le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.*

2° *Il dépend de leur nature.*

3° *Il est proportionnel à la pression normale.*

LOIS DU FROTTEMENT PENDANT LE MOUVEMENT.

1° *Le frottement pendant le mouvement est plus petit que le frottement au départ.*

2° *Il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.*

3° *Il dépend de leur nature.*

4° *Il est indépendant de la vitesse.*

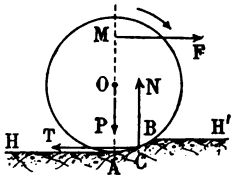
340. TRAVAIL RELATIF AU FROTTEMENT.

Soit Φ la force de frottement ; cette force agissant toujours en sens contraire du mouvement, donnera lieu à un travail *résistant* $\mathfrak{T}$. Si e est l'espace parcouru, nous aurons

$$\mathfrak{T} = -\Phi \times e.$$

Ce produit $\Phi \times e$ représente de l'*énergie perdue* ou plutôt qu'on ne retrouve pas d'une façon *visible*. Ce travail se transforme en énergie *thermique*, *électrique*, etc.

341. RÉSISTANCE AU ROULEMENT (*). — La résistance au roulement est aussi appelée *frottement de roulement*. Elle résulte de la déformation qui se produit au contact du corps roulant et de la surface sur laquelle il roule. Cette déformation suit le point ou l'arête de contact, pour disparaître partiellement, quand le contact a cessé. Supposons, par exemple, un cylindre O roulant sur le plan horizontal HH′ dans le sens de la flèche. Le contact s'étend sur une largeur AB que l'on ne peut plus confondre avec un point géométrique A.



La résultante des réactions du plan passera par C et aura pour composantes N et T. Cette dernière est le *frottement de glissement*. La résistance au roulement est d'ailleurs caractérisée par ce fait, que la réaction normale ne passe pas par A, mais est appliquée au point C, tel que $AC = \delta$.

Cette quantité δ a été déterminée par les expériences de Coulomb et de Morin. δ est indépendante, dans une grande mesure, du rayon du cylindre, mais elle varie avec la nature des surfaces en contact.

Supposons le cylindre soumis à l'action d'une force horizon-

(*) *Traité de Mécanique*. E. Collignon. Paris, Hachette, 1881.

tale F, appliquée en M tel que $AM = h$, et écrivons les équations d'équilibre des forces appliquées au rouleau ; nous aurons d'abord

$$T = F, \qquad P = N;$$

puis, en prenant les moments par rapport à A et négligeant la distance très petite de A à la force T,

$$Fh = N\delta.$$

Pour qu'il y ait roulement et non glissement, il faut et il suffit

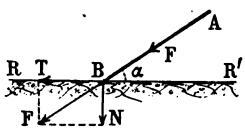
$$T < Pf,$$

ou bien $$F < Pf,$$

ou encore $$\delta < fh.$$

342. *Une barre rigide* AB, *s'appuie sur un plan fixe* RR′ *dépoli, par son extrémité* B. *Elle est soumise à l'action d'une force* F, *appliquée suivant sa direction. Trouver quelle inclinaison il faut donner à la barre, pour que le glissement de l'extrémité* B *sur le plan* RR′ *soit possible.*

Décomposons F, dont le point d'application a été transporté en B, en deux autres : l'une N normale au plan, l'autre T tangentielle.



La force de frottement étant fN, pour qu'il y ait glissement, il faut

$$T > fN;$$

mais, φ étant l'angle du frottement, nous avons $f = \operatorname{tg}\varphi$; en outre $\frac{T}{N} = \operatorname{cotg}\alpha$, et il viendra

$$\operatorname{cotg}\alpha > \operatorname{tg}\varphi,$$

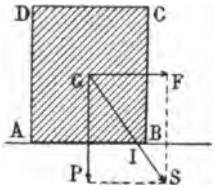
d'où $$\alpha < 90^\circ - \varphi.$$

Quand cette inégalité ne sera pas vérifiée, le glissement ne se produira pas ; on dit alors que la barre est *arc-boutée* sur le plan.

343. *Un parallélépipède rectangle homogène, pesant, est posé*

sur un plan horizontal dépoli. On applique à ce solide une force F, *au centre de l'une des faces verticales et perpendiculairement à cette face. On demande dans quel cas cette force fera glisser le solide sur le plan, et dans quel cas elle le fera basculer.*

Figurons la section du solide par le plan vertical contenant la force F.



Cette force et le poids P se composeront pour donner la résultante GS.

Le corps demeurera en repos si le plan horizontal peut opposer une réaction égale et directement opposée à GS, c'est-à-dire si le point I est situé entre A et B, et si l'on a, de plus,

$$F \leqslant fP,$$

f étant le coefficient de frottement.

Le point I étant entre A et B, si nous avons

$$F > fP,$$

le parallélépipède glissera sur le plan.

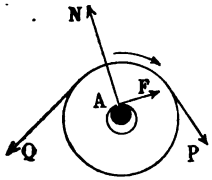
Enfin, si le point I est situé en dehors de AB, le solide basculera autour de l'arête qui se projette en B.

En résumé, en posant $AB = a$, $BC = b$, et appliquant au besoin le théorème des moments par rapport au point B, nous obtiendrons

1°	$\begin{cases} F \leqslant Pf, \\ F \leqslant P\dfrac{a}{b}, \end{cases}$	repos.
2°	$Pf < F < P\dfrac{a}{b}$,	glissement.
3°	$F > P\dfrac{a}{b}$,	chavirement.

344. *Frottement dans la poulie fixe.*

Considérons une poulie à l'état de mouvement uniforme. La puissance P, la résistance Q et la réaction de l'axe se feront équilibre, dans toutes les positions de la machine.



Comme il y a un certain jeu entre la poulie et son axe de rotation, l'ouverture circulaire de celle-ci ne touchera le boulon que suivant une génératrice A. En ce point, le boulon opposera une réaction que nous représenterons par ses deux composantes : l'une normale N, l'autre tangentielle, qui est précisément la force de frottement $F = fN = N \operatorname{tg} \varphi$.

Ainsi, nous avons quatre forces, P, Q, N, F qui se font équilibre.

La résultante R des forces P et Q, est donc égale et directement opposée à la résultante de F et de N.

Nous avons, par suite,

$$F = R \sin \varphi = R \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Prenons les moments par rapport à l'axe du boulon ; il viendra, en représentant par r, r' les rayons de la poulie et du boulon,

$$(P - Q)r - R \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} r' = 0;$$

mais si α désigne l'angle $(\widehat{P, Q})$, nous avons

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha,$$

et il viendra

$$(1) \quad (P - Q)r - \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \cdot \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} r' = 0.$$

Cette relation définit, α étant donné, le rapport qui doit exister entre P et Q, pour que la poulie soit en équilibre.

Nous obtenons, en effet, en rendant l'équation rationnelle et ordonnant,

$$[r^2(1+f^2) - r'^2 f^2]\left(\frac{P}{Q}\right)^2 - 2[r^2(1+f^2) - r'^2 f^2 \cos \alpha] \frac{P}{Q} + r^2(1+f^2) - r'^2 f^2 = 0.$$

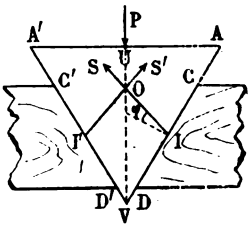
Or, si nous remplaçons $\frac{P}{Q}$ par 1, nous obtenons

$$-2r'^2f^2(1-\cos\alpha)<0\,;$$

par conséquent, 1 sépare les racines de cette équation et d'après (1) qui nécessite $P-Q>0$, la racine supérieure à 1 conviendra seule.

345. *Équilibre du coin en tenant compte du frottement.*

Supposons que la section droite du coin soit un triangle isocèle et que le frottement ait même coefficient, $f=\operatorname{tg}\varphi$, sur les deux faces CD et C'D'.



Les réactions IS, I'S' de ces faces seront alors symétriquement placées par rapport au plan médian UV.

Les trois forces S, S', P s'équilibrant, la somme de leurs projections sur la direction UV sera nulle, et nous aurons

$$P=2S\cos\left(90^\circ-\varphi-\frac{V}{2}\right)=2S\sin\left(\varphi+\frac{V}{2}\right),$$

d'où
$$\frac{P}{S}=2\sin\left(\varphi+\frac{V}{2}\right).$$

Quant à la force de frottement F, elle est donnée par

$$F=S\sin\varphi,$$

ou
$$F=\frac{P\sin\varphi}{2\sin\left(\varphi+\frac{V}{2}\right)}.$$

La force F', qui sollicite la face CD à s'écarter, étant la composante de S qui est normale au plan de cette face, nous aurons finalement

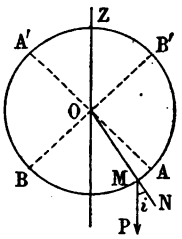
$$F'=\frac{P\cos\varphi}{2\sin\left(\varphi+\frac{V}{2}\right)}.$$

Dans le cas particulier où il n'y a pas de frottement, on obtient

$$F' = \frac{P}{2 \sin \frac{V}{2}}.$$

346. *Une bille peut se déplacer à l'intérieur d'un tube circulaire et situé dans un plan vertical. Trouver les régions où l'on doit la placer, pour qu'elle se tienne en équilibre.*

Soit la bille M de poids P. Pour que l'action de ce poids soit détruite par la réaction, il faut et il suffit que l'angle i que sa direction fait avec la normale MN, soit inférieur ou au plus égal, à l'angle φ du frottement.



Par suite, si nous traçons les diamètres AA', BB', inclinés de φ sur la verticale Oz, nous voyons que la bille sera en équilibre quand elle sera située sur l'un des arcs AB, A'B'.

347. *Un corps pesant 4^{kg} se meut, d'un mouvement uniformément accéléré, sur un plan horizontal, sous l'action d'une force de $3^{kg},3$. La direction de cette force fait 45° avec le plan.*

On demande de calculer l'accélération du mouvement, sachant que le coefficient de frottement est $\frac{1}{3}$.

(*Conc. acad., Montpellier, 1879.*)

Soit γ l'accélération du mouvement en question, nous avons

(1) $$F = m\gamma,$$

F étant la force motrice.

Or, $$m = \frac{4}{g};$$

d'autre part, la force motrice a pour expression

$$F = 3,3.\cos 45° - \frac{1}{3} \times 3,3.\sin 45° - \frac{1}{3} \times 4,$$

(comme on s'en rend compte en remplaçant la force de $3^{kg},3$ par ses composantes tangentielle et normale),

ou bien

$$F = 0{,}222.$$

Remplaçons dans (1), il viendra

$$0{,}222 = \frac{4}{g}\gamma,$$

d'où nous tirons

$$\gamma = 0^{m},54.$$

348. *Quel est le travail absorbé pendant 1 seconde, par le frottement d'une roue hydraulique sur ses tourillons? La roue pèse* $10\,000^{kg}$, *le rayon du tourillon mesure* $0^{m},08$, *la roue fait 1 tour en 10 secondes et le coefficient de frottement est* 0,05.

Le travail est donné par la formule

$$\mathfrak{T} = F.e;$$

mais

$$F = fP = 0{,}05 \times 10\,000 = 500,$$

$$e = \frac{2\pi \times 0{,}08}{10};$$

donc

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi \times 0{,}08 \times 500}{10} = 25 \text{ kilogrammètres environ.}$$

349. *Calculer le travail consommé pendant chaque seconde, par le frottement d'une roue hydraulique sur ses tourillons.*

Le poids de la roue est $10\,000^{kg}$ *et le rayon du tourillon est* $0^{m},1$; *on suppose d'ailleurs que la roue fait 10 tours à la minute et que le coefficient de frottement a pour valeur* $f = 0{,}07$.

L'espace parcouru pendant 1 seconde par le point d'application de la force de frottement est

$$e = \frac{2\pi \times 0{,}1 \times 10}{60};$$

la force de frottement a pour valeur

$$F = 10\,000 \times 0{,}07.$$

Il viendra donc, pour le travail demandé,

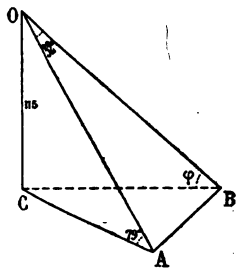
$$\mathfrak{T} = F \times e = \frac{2\pi \times 0{,}1 \times 10 \times 10000 \times 0{,}07}{60},$$

ou bien $$\mathfrak{T} = 73^{\text{kgmt}},3.$$

350. *Pour se procurer la pierre nécessaire à la construction d'un pont en maçonnerie, on a ouvert une carrière située au sommet d'une montagne, élevée de* 115^{m} *au-dessus de la vallée. La ligne de plus grande pente de la montagne fait avec l'horizon un angle de* 79°. *On descend les pierres extraites de la carrière à l'aide d'un plan incliné, qui ne suit pas la ligne de plus grande pente, mais qui fait avec elle un angle de* 32°. *Ce plan incliné est à double voie et le wagonnet qui, à chaque voyage, descend* 5 *tonnes* 200 *de pierre, fait, en même temps, remonter un wagonnet vide dont le poids est d'une tonne. Le câble sans fin qui unit les chariots, s'enroule au bas du plan sur un cylindre, au mouvement duquel s'oppose une force suffisante pour rendre uniforme le mouvement sur le plan incliné. On demande quelle devra être l'intensité de cette force, en supposant négligeables les résistances dues à la raideur du câble et au frottement qu'il exerce sur les poulies, et en prenant pour coefficient de frottement des roues des wagonnets* 0,04.

(*Journal de Vuibert, 1883-84.*)

Soit OB la double voie, qui fait 32° avec la ligne de pente OA, et calculons son inclinaison φ.



Nous avons

$$OC = OA \sin 79^\circ = OB \sin \varphi ;$$

d'autre part, le triangle OAB, rectangle en A, nous donne $OA = OB \cos 32^\circ$.

Il vient donc

$$\sin \varphi = \frac{OA}{OB} \sin 79^\circ = \sin 79^\circ . \cos 32^\circ .$$

Soit maintenant x la force inconnue dirigée suivant le câble.

La force de traction due au wagonnet plein, est

$$(5^t,200 + 1^t) \sin \varphi.$$

Pareillement, la résistance due au wagonnet vide est $\sin \varphi$. En outre, les deux wagonnets exerçant sur les rails une pression de $(5^t,200 + 2^t) \cos \varphi$, la force de frottement sera

$$0,04(5,200 + 2) \cos \varphi.$$

Pour que le mouvement soit uniforme, il faut que la force motrice soit nulle, c'est-à-dire que la traction du wagonnet plein fasse équilibre aux résistances.

Nous obtenons alors

$$x + \sin \varphi + 0,04 \times 7,2 \times \cos \varphi = 6,2 . \sin \varphi.$$

La table de logarithmes donnant

$$\sin \varphi = 0,832, \qquad \cos \varphi = 0,554,$$

il vient, après calculs, $x = 4^t,167$.

351. *Un train composé de* 12 *wagons est lancé à une vitesse de* 65^{km} *à l'heure. A un moment donné, le train étant sur une partie de voie en palier et en alignement droit, on suspend l'action de la vapeur et on serre les freins du tender et de deux wagons. Quel espace parcourra le train avant de s'arrêter ?*

(*Poids de la locomotive* = 50 *tonnes ; poids du tender* = 36 *tonnes ; poids de chacun des wagons* = 14 *tonnes ; nombre d'essieux du tender et des wagons* = 3 ; *nombre d'essieux sur lesquels agissent les freins* = 2 *par véhicule ; coefficient de frottement des roues sur les rails* $= \frac{1}{6}$; *rapport de la force qui s'oppose au mouvement au poids du véhicule* $= \frac{1}{1000}$.

(*Journal de Vuibert, 1885-86.*)

Appelons x l'espace cherché.

La demi-force vive T que possède le train au moment où l'on suspend l'action de la vapeur, doit être égale au travail résistant absorbé par le roulement des roues libres et par le frottement des roues enrayées.

Nous aurons donc

$$(1) \qquad T = \mathfrak{T}_r + \mathfrak{T}_f.$$

Or, en négligeant la force vive due à l'inertie des roues, nous avons

$$T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = \frac{1}{2g}(50 + 36 + 12 \times 14)v^2 = \frac{127}{g} \times \overline{18,05}^2.$$

$$\mathfrak{T}_r = \frac{1}{1000}(50 + 140)x,$$

en négligeant la résistance au roulement des trois véhicules munis de freins.

Pour calculer $\mathfrak{T}_f$, remarquons que chaque paire de roues supporte un poids égal au tiers du poids total du véhicule ; dès lors, le frottement occasionné par l'enrayement de deux paires de roues du tender et de deux wagons sera

$$\frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}.36 + 2 \times \frac{2}{3}.14\right] = \frac{64}{9},$$

et nous aurons $$\mathfrak{T}_f = \frac{64}{9}x.$$

Substituons dans (1), nous obtiendrons

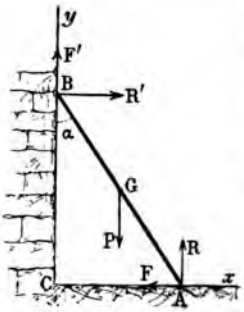
$$\frac{127 \times \overline{18,05}^2}{g} = \left(\frac{190}{1000} + \frac{64}{9}\right)x,$$

d'où l'on tire $$x = 578^m.$$

352. *On pose une barre* AB, *droite et homogène, d'un poids donné* P, *de manière qu'elle appuie son extrémité supérieure* B, *contre un mur vertical* Cy *et son extrémité inférieure* A *sur le sol* Cx ; *elle est d'ailleurs dans un plan vertical perpendiculaire au mur. On demande :* 1° *la plus grande valeur que l'on peut donner à l'angle* α *qu'elle fait avec le mur, pour qu'elle reste en équilibre, connaissant ses coefficients de frottement* f, f' *avec le sol et avec le mur ;* 2° *quelles sont les valeurs des réactions normales du sol et du mur, au moment où l'angle* α *atteint sa valeur maximum ;* 3° *dans l'hypothèse* $f = f'$, *quel rapport il y a entre l'angle limite* α *et l'angle commun de frottement.*

(*Conc. acad., Lille, 1877.*)

La barre commençant à glisser, l'extrémité A s'éloignera évidemment de C, tandis que B s'en rapprochera ; cette remarque définit les directions des forces de frottement F et F'.



Appelons R, R' les réactions normales ; nous aurons en projetant sur Cx, Cy et en prenant les moments par rapport à l'origine C,

$$F - R' = 0,$$

$$R + F' - P = 0,$$

$$\frac{P}{2}\sin\alpha + R'\cos\alpha - R\sin\alpha = 0;$$

mais

$$F = fR, \qquad F' = f'R';$$

et il viendra

$$(1) \qquad fR - R' = 0,$$

$$(2) \qquad R + f'R' - P = 0,$$

$$(3) \qquad P\sin\alpha + 2R'\cos\alpha - 2R\sin\alpha = 0.$$

Nous tirons des équations (1) et (2)

$$R = \frac{1}{1+ff'}P, \qquad R' = \frac{f}{1+ff'}P;$$

telles sont les réactions normales qu'exercent le sol et le mur.

En substituant maintenant dans (3) à R et R' leurs valeurs, nous aurons

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2f}{1-ff'}.$$

Or, $\operatorname{tg}\alpha$ est évidemment positif et pour qu'il y ait une position de départ il faut

$$1 - ff' > 0,$$

ou bien, φ et φ' étant les angles du frottement,

$$\cot\varphi - \operatorname{tg}\varphi' > 0,$$

d'où

$$\varphi + \varphi' < 90^\circ.$$

Cas particulier. — $f = f' = \operatorname{tg}\varphi$.

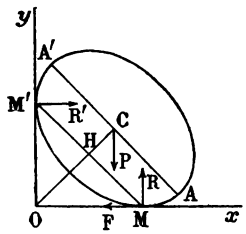
Nous avons alors $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi},$$

d'où $$\alpha = 2\varphi.$$

Dans ce cas, la condition de possibilité s'écrit $\varphi < 45°$.

353. *Un disque elliptique, dont l'axe est horizontal, appuie sa surface convexe sur deux plans, l'un horizontal et dépoli, l'autre vertical et poli. Le corps est sur le point de glisser, quand le grand axe de l'ellipse de base fait 45° avec l'horizon. Quel est le coefficient de frottement sur le plan horizontal?*

Soit l'ellipse dont le grand axe $AA' = 2a$ est incliné de 45° sur Ox.



Ce disque est soumis à son poids P, à la réaction normale R' du plan vertical et aux deux forces R et F dont la résultante représente la réaction en M du plan horizontal dépoli.

Si le corps est sur le point de glisser, on a $F = fR$,

f étant le coefficient de frottement de Ox.

Pour exprimer l'équilibre de ces quatre forces, nous les projetterons sur Ox, sur Oy et nous annulerons la somme de leurs moments, pris par rapport au point O; il viendra ainsi

$$R' - F = 0, \qquad R - P = 0,$$

$$(1) \qquad P.\overline{OC}\cos\widehat{COx} - R.\overline{OM} + R'.\overline{OM'} = 0.$$

Or, le triangle MOM' est évidemment isocèle et OC est bissectrice de $\widehat{xOy}$; d'autre part, nous avons

$$OC = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad CH.CO = b^2,$$

d'où

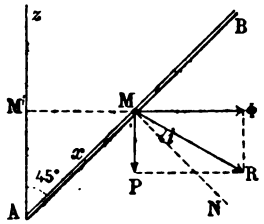
$$OH = OC - CH = \sqrt{a^2+b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et $$OM = \frac{OH}{\cos 45°} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

356. *Un tube* AB *de* 4^m *de long, fait avec la verticale ascendante* Az *un angle de* 45° *et tourne autour de cet axe fixe en effectuant* 30 *tours à la minute.*

Une bille pesante M, *peut glisser dans ce tube avec frottement. Sachant que le coefficient de frottement est* $\frac{1}{2}$, *on demande quelles positions doit occuper la bille, pour qu'elle soit en équilibre relatif.*

Soient P le poids de la bille, Φ la force centrifuge, i l'angle du frottement et ω la vitesse angulaire de AB.



Pour que le point M soit en équilibre relatif, il faut que la résultante R des deux forces P et Φ fasse avec la normale MN un angle inférieur ou au plus égal à i.

Soit ρ l'angle de R avec MN, nous avons

$$(R) = (\Phi) + (P),$$

c'est-à-dire, en projetant sur $\overline{MN}$,

$$R \cos \rho = \Phi \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} (P + \Phi);$$

mais

$$P = mg,$$

$$\Phi = m\omega^2 . \overline{MM'} = m\omega^2 x \sin 45^\circ = \frac{m\omega^2}{\sqrt{2}} x,$$

$$R = \sqrt{P^2 + \Phi^2} = m\sqrt{g^2 + \frac{\omega^4}{2} x^2};$$

il viendra donc, en substituant,

$$\cos \rho = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(g + \frac{\omega^2}{\sqrt{2}} x\right)}{\sqrt{g^2 + \frac{\omega^4}{2} x^2}}$$

Or, en exprimant que $\rho \leqslant i$, il viendra

$$\frac{(g\sqrt{2}+\omega^2 x)}{2\sqrt{g^2+\frac{\omega^4}{2}x^2}} \geqslant \cos i.$$

x étant positif, nous pouvons élever au carré et nous obtenons

$$(g\sqrt{2}+\omega^2 x)^2 - 4\cos^2 i\left(g^2+\frac{\omega^4}{2}x^2\right) \geqslant 0,$$

ou bien, après avoir ordonné,

$$(1)\quad \omega^4(1-2\cos^2 i)x^2 + 2g\omega^2\sqrt{2}\,.\,x + 2g^2(1-2\cos^2 i) \geqslant 0.$$

Introduisons maintenant les données de l'énoncé; nous avons

$$\operatorname{tg} i = \frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin i = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos i = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\omega = \frac{2\pi \times 30}{60} = \pi,$$

et l'inégalité (1) s'écrira

$$3\pi^4 x^2 - 10g\pi^2\sqrt{2}\,x + 6g^2 \leqslant 0,$$

d'où nous tirons $\dfrac{g\sqrt{2}}{3\pi^2} < x < \dfrac{3g\sqrt{2}}{\pi^2}$.

Comme on a visiblement

$$\frac{g\sqrt{2}}{3\pi^2} < 4, \qquad \frac{3g\sqrt{2}}{\pi^2} > 4,$$

et que la barre a pour longueur 4^m, les limites de x répondant à l'équilibre relatif de la bille, seront

$$\frac{g\sqrt{2}}{3\pi^2} < x < 4.$$

357. *Un canal de section très petite a la forme d'une demi-circonférence limitée à un diamètre horizontal* AB *et située dans un plan vertical. Une bille* M *de poids* P *peut se mouvoir avec frottement dans ce canal et est attachée à un fil qui, passant sur une poulie très petite placée en* A, *supporte à l'autre extrémité un poids* P.

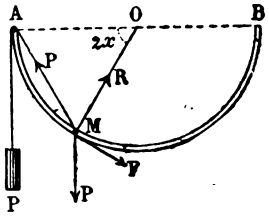
Positions limites de l'équilibre de la bille.

Application : L'angle du frottement vaut 60° *ou* 30°.

Soit $AOM = 2x$, et $f = \operatorname{tg}\varphi$ le coefficient de frottement de la bille à l'intérieur du canal.

La bille est soumise à son poids P, à la force P dirigée suivant MA, enfin à la réaction du canal.

Pour l'équilibre, cette réaction est évidemment située dans le plan de la figure, de sorte qu'elle se décomposera en réaction normale R et réaction tangentielle ou force de frottement $F = fR$.



Pour écrire les conditions d'équilibre, il faut considérer deux cas suivant la direction de la force de frottement, c'est-à-dire suivant que la bille est sur le point de démarrer dans le sens MA ou en sens contraire.

1° Démarrage vers A.

Projetons sur l'horizontale, puis sur la verticale, nous obtiendrons

$$R\cos 2x + F\sin 2x - P\sin x = 0,$$
$$R\sin 2x - F\cos 2x + P\cos x - P = 0.$$

Remplaçons F par $R\operatorname{tg}\varphi$, il viendra

$$R(\cos 2x + \operatorname{tg}\varphi\sin 2x) - P\sin x = 0$$
$$R(\sin 2x - \operatorname{tg}\varphi\cos 2x) - P(1 - \cos x) = 0,$$

d'où, en éliminant R,

$$\operatorname{tg}(2x - \varphi) = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

cette équation nous donne

$$2x - \varphi = k\pi + \frac{x}{2},$$

d'où

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\varphi}{3};$$

mais $2x$ doit être inférieur à π; il faut donc prendre $k = 0$,

de sorte qu'il reste

$$x = \frac{2\varphi}{3},$$

solution qui convient, puisque l'angle du frottement est inférieur à 90°.

2° Démarrage vers B.

Pour avoir l'équation d'équilibre dans ce cas, il suffit, dans les calculs précédents, de changer le signe de F, ou bien encore, de remplacer φ par $-\varphi$.

Nous obtenons ainsi

$$x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{2\varphi}{3};$$

mais

$$2x < \pi,$$

par suite, on doit choisir $k = 1$; il vient d'abord

$$x = \frac{2}{3}(\pi - \varphi),$$

puis, en remplaçant dans

$$2x < \pi,$$

on a

$$\frac{4}{3}(\pi - \varphi) < \pi,$$

d'où nous tirons

$$\varphi > \frac{\pi}{4}.$$

Application. — 1°. — $\varphi = 60°$. Dans ce cas, il peut y avoir démarrage vers A et vers B. Nous trouvons comme angles limites

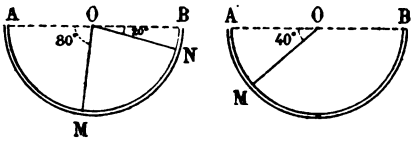
$$2x' = \frac{4\varphi}{3} = 80°,$$

$$2x'' = \frac{4}{3}(180° - \varphi) = 160°.$$

Par conséquent, si nous traçons les rayons OM et ON tels que

$$\widehat{AOM} = 80°, \quad \widehat{BON} = 20°,$$

nous obtiendrons l'arc MN en chaque point duquel le point sera en équilibre.



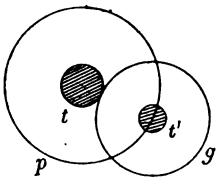
2°. — $\varphi = 30°$. — Le démarrage vers B ne peut pas se produire dans ce cas; nous ne trouvons qu'un angle limite

$$2x' = \frac{4\varphi}{3} = 40°.$$

Or, traçons le rayon OM faisant avec OA l'angle de 40°; le point restera en équilibre quand on le placera sur l'arc MB.

358. *Frottement dans un système de poulies.*

Considérons une poulie p supportant le poids P. Si R est son rayon et ρ celui de ses tourillons, le travail absorbé par le frottement, pour un tour de la poulie, sera



$$\mathfrak{T} = f\mathrm{P}.2\pi\rho.$$

Supposons maintenant que les tourillons t de cette poulie reposent sur quatre galets égaux, tels que g, construits d'ailleurs avec la même substance; soient Q le poids de chaque galet, R' son rayon et ρ' celui de ses tourillons.

Quand la poulie p fera un tour, un point de la circonférence du tourillon t' décrira $2\pi\rho\,\frac{\rho'}{\mathrm{R}'}$.

Par suite, le poids des quatre galets de la poulie et de sa charge étant $\mathrm{P} + 4\mathrm{Q}$, nous aurons, avec cette disposition, pour le travail absorbé et correspondant à un tour de la poulie p,

$$\mathfrak{T}' = f(\mathrm{P} + 4\mathrm{Q})2\pi\rho\,\frac{\rho'}{\mathrm{R}'},$$

et il viendra

$$\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}} = \frac{f(\mathrm{P} + 4\mathrm{Q}).2\pi\rho\,\frac{\rho'}{\mathrm{R}'}}{f\mathrm{P}.2\pi\rho} = \left(1 + 4\,\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}\right)\frac{\rho'}{\mathrm{R}'}.$$

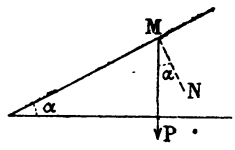
Or, en général, le rapport $\frac{Q}{P}$ est petit, $1 + 4\frac{Q}{P}$ est donc voisin de 1 et le rapport $\frac{\rho'}{R'}$ n'est qu'une fraction de l'unité;

on a $$\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}} < 1,$$

d'où $$\mathfrak{T}' < \mathfrak{T}.$$

La présence des galets diminue donc le frottement. On rencontre cette disposition dans la machine d'Atwood.

359. ÉQUILIBRE D'UN POINT PESANT PLACÉ SUR UN PLAN INCLINÉ DÉPOLI. — I. *Le point n'est soumis qu'à son poids.* D'après la théorie du frottement, si φ est l'angle du frottement, pour que le poids P soit tenu en équilibre par la résistance du plan, il faut

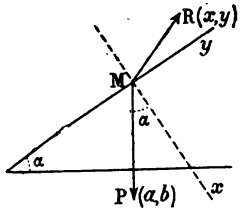


$$\alpha \leqslant \varphi;$$

de sorte que nous obtenons, en résumant,

$\alpha \leqslant \varphi$, équilibre,
$\alpha > \varphi$, démarrage du point vers le bas.

II. *Le point est soumis à son poids et à une autre force donnée.* Soit le point M de poids P et soumis à l'action d'une force R située dans le plan de la figure.



Nous nous proposons de déterminer la région dans laquelle doit se trouver l'extrémité R de cette force, pour que le point M soit en équilibre.

Pour cela, choisissons deux axes de coordonnées rectangulaires Mx, My.

Les projections de la force $\overline{MR}$ sur les axes sont précisément les coordonnées x, y du point R, et nous représenterons par a, b les projections du poids $\overline{MP}$.

Soient enfin X, Y les projections de la résultante de ces deux forces sur les axes considérés.

Le théorème des projections nous donne

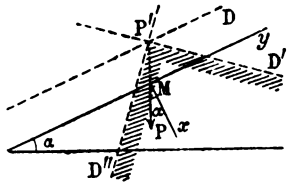
$$a + x = X, \qquad b + y = Y.$$

Pour que cette résultante soit détruite par la résistance du plan, il faut d'abord qu'elle soit dirigée, par rapport à la ligne de pente My, du même côté que Mx, car le point est posé *sur* le plan ; ceci donne

$$(1) \qquad a + x > 0 ;$$

il faut en outre qu'elle fasse avec la normale Mx un angle i, inférieur ou égal à l'angle du frottement φ ; en vertu de (1), cette dernière condition s'exprimera par l'inégalité

(A)



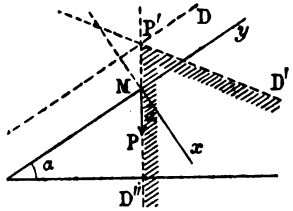
$$\operatorname{tg}^2 i \leqslant \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

mais

$$\operatorname{tg} i = \frac{Y}{X} = \frac{b + y}{a + x},$$

et il viendra

(B)



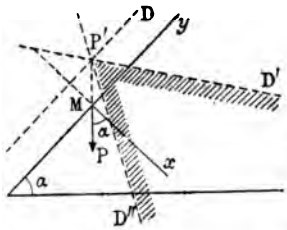
$$\left(\frac{b + y}{a + x}\right) \leqslant \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

ou

$$(b + y)^2 - (a + x)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \leqslant 0,$$

ou bien encore

(C)



$$(2) \quad [b + y - (a + x) \operatorname{tg} \varphi][b + y + (a + x) \operatorname{tg} \varphi] \leqslant 0.$$

Pour interpréter les inégalités (1) et (2), nous distinguerons trois cas, suivant les valeurs relatives de $\operatorname{tg} \varphi$ et de $\operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{b}{a}$.

1° $\alpha < \varphi$. — Alors $b + a \operatorname{tg} \varphi > 0$.

Soient D, D', D'' les droites qui ont respectivement pour équations

$$a + x = 0,$$
$$b + y - (a + x) \operatorname{tg} \varphi = 0,$$
$$b + y + (a + x) \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Si P′ est le symétrique de P par rapport à M, D est la parallèle à My menée par P′, D′ et D″ passent aussi par P′ et font avec Mx les angles φ et $180° - \varphi$.

Ceci posé, si l'on substitue les coordonnées (0, 0) de M dans les premiers membres de nos deux inégalités, on obtient

$$a > 0,$$
$$b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi < 0.$$

Il résulte de là que l'extrémité R de la force doit se trouver, par rapport à D, du même côté que M et aussi dans l'angle des droites D′ et D″ qui contient le point M.

En résumé, R doit appartenir à la région du plan couverte de hachures (figure A).

2° $\alpha = \varphi$. — Alors $b + a \operatorname{tg} \varphi = 0$.

En raisonnant comme précédemment, on obtient la région indiquée par la figure (B).

3° $\alpha > \varphi$. — Dans ce cas $b + a \operatorname{tg} \varphi < 0$.

Le même raisonnement conduit aux conclusions indiquées par la figure (C).

360. *Une machine à vapeur met en jeu un système de pompes, qui élèvent l'eau d'un fleuve à* 155^m *de hauteur, pour l'alimentation d'une ville. On demande de calculer à* $\frac{1}{500}$ *près, le rendement de ce système de pompes, en supposant : 1° que la force de la machine, mesurée sur l'arbre de couche, soit de* 1500 *chevaux-vapeur; 2° que les réservoirs de la ville reçoivent* 30000 *mètres cubes en* 24 *heures.*

Nous avons, en désignant par $\mathfrak{T}_u$ le travail utile et $\mathfrak{T}_m$ le travail moteur pendant 1 seconde,

$$\mathfrak{T}_u = \frac{30000000 \times 155}{24 \times 60 \times 60}, \qquad \mathfrak{T}_m = 1500 \times 75.$$

Par suite, nous aurons pour le rendement

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{T}_u}{\mathfrak{T}_m} = \frac{30000000 \times 155}{24 \times 60 \times 60 \times 1500 \times 75} = 0{,}478.$$

EXERCICES

351. — Un corps déposé sur un plan horizontal, est heurté par un autre qui lui communique une vitesse de 5^m par seconde. Quel chemin parcourra-t-il avant de s'arrêter, sachant qu'il pèse 3^{kg} et que le frottement du plan contre lui est de 1^{kg} ?

(*Bacc. ès sciences, Lille, 1885.*)

352. — Un wagon du poids de 3000^{kg} est poussé par une force de 100^{kg}. Quelle sera sa vitesse acquise lorsqu'il aura parcouru 100^m, sachant que sa résistance au roulement est de 60^{kg} ?

(*Bacc., Alger, 1895.*)

353. — Sous l'action d'une certaine force, un corps pesant 100^{kg} s'élève d'un mouvement uniforme suivant la ligne de pente d'un plan incliné de 45°. On demande de calculer la grandeur de la force qui agit sur ce corps en la supposant : 1° parallèle à la longueur du plan ; 2° parallèle à la base. Coefficient de frottement = 0,30.

354. — Un traîneau pèse 500^{kg} et fait 6^{km} à l'heure ; le coefficient de frottement est 0,5. Trouver le travail consommé par le frottement en 1 seconde.

355. — Un corps lancé sur un parquet uni et horizontal, parcourt en glissant $1^m,80$, et il s'arrête à cause du frottement. Calculer la vitesse initiale en supposant le coefficient de frottement égal à 0,25.

(*Concours gén., 1875.*)

356. — On abandonne au même instant et d'un même point O, des mobiles pesants qui suivent des obliques OA, OA', ... dépolies. On suppose que le coefficient de frottement est le même pour chacune d'elles, et l'on demande le lieu des positions de ces mobiles au temps t.

357. — Une voiture à deux roues fait 6^{km} à l'heure ; elle pèse, quand elle est chargée, 2000^{kg} ; les roues et les essieux ont respectivement pour rayons $0^m,70$, $0^m,04$. Connaissant le coefficient de frottement 0,08, calculer le travail dépensé par le frottement de l'essieu en 1 minute.

358. — Un cylindre de rayon R et de hauteur h est posé par sa base sur un plan incliné AB. On demande : 1° pour quelle inclinaison i il commence à glisser, en tenant compte du frottement; 2° pour quelle inclinaison i il n'est plus en équilibre, en supposant que ce frottement est suffisamment grand pour qu'il ne glisse pas. 3° Le plan incliné AB se confond avec le plan horizontal AH en tournant autour de A, le coefficient de frottement étant $\frac{1}{10}$; on demande si le cylindre glissera ou tombera avant de glisser, en supposant d'abord $h = 30R$ et ensuite $h = R$.

(*Bacc., Alger, 1892.*)

359. — Un point pesant glisse avec frottement sur une droite inclinée; φ étant l'angle de frottement, on demande quelle doit être l'inclinaison de la droite, pour que le chemin parcouru pendant un temps donné soit maximum.

360. — Un mobile descend un plan incliné en parcourant une distance de 35^m. La projection de ce chemin sur le plan horizontal est égale à 18^m. Le coefficient de frottement est 0,2. Quel temps le mobile mettra-t-il à parcourir la distance de 35^m ?

(*Bacc. ès sciences, Nancy.*)

361. — On place une sphère dont le poids est P dans l'intérieur d'un angle dièdre, dont l'arête est horizontale et qui est formé par deux lames rectangulaires également inclinées, homogènes, égales entre elles, libres de tourner autour de l'arête commune. Les bords supérieurs des deux lames sont réunis par un fil dont on augmente graduellement la tension. On demande la valeur de cette tension quand la sphère commence à prendre un mouvement ascendant; f est le coefficient de frottement sur chacune des lames; ces lames ont b pour largeur et font un angle α avec l'horizon; chacune pèse Q^{kg}.

362. — Une tige homogène AB, ayant 1^m de long et pesant 4^{kg} repose sur un sol horizontal OA et s'appuie contre un mur vertical OB; elle est située dans un plan perpendiculaire à l'intersection du sol et du mur.

A l'aide d'un corps pesant AC, posé sur le sol en A, on veut maintenir la tige en équilibre dans une position telle que OA soit égal à $0^m,80$.

Quel doit être au minimum le poids de ce corps?

Le mur est parfaitement poli; quant au sol, il exerce un frotte-

ment sur la tige et sur le corps AC ; les coefficients de frottement sont 0,4 relativement à la tige et 0,7 pour le corps.

(*Conc. acad. ens. spécial, Nancy, 1879.*)

363. — Deux barres homogènes, pesantes et identiques BA, BA′ sont articulées en B ; on les suspend par une tige horizontale xx', qui passe dans deux anneaux placés en A et A′.

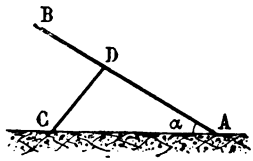
Étudier l'équilibre de ce système articulé en supposant qu'il n'y ait pas de frottement en B, mais que les deux anneaux frottent sur xx'.

364. — Déterminer la position la plus élevée qu'on puisse donner à une tige horizontale dans une sphère dépolie sans qu'elle glisse.

(De Saint-Germain)

365. — Étudier l'équilibre d'un cube homogène, pesant, placé sur un plan incliné dépoli, les côtés du carré d'appui étant parallèles aux horizontales et aux lignes de pente du plan.

366. — Une tige pesante et homogène AB, dont la longueur $2l$ et le poids ϖ sont connus, peut pivoter dans un plan vertical autour de la charnière A. On veut la soutenir dans une position faisant l'angle α avec l'horizontale, au moyen d'une béquille rigide CD s'appuyant en C sur le sol. La longueur de cette béquille est l, son poids est supposé négligeable. Elle peut glisser sur le sol aussi bien que sur la tige AB, et les coefficients de frottement sont f_1 et f_2.



On demande quelles seront les positions d'équilibre du système et les positions limites qu'on pourra donner à la béquille, sans que le glissement se produise ; déterminer la position pour laquelle l'effort de compression supporté par la béquille est minimum.

(*École des Ponts et Chaussées, Cours spéciaux, 1896.*)

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE-SCIENCES

Année 1895.

361. *Dans un plan vertical, on donne une droite fixe* OA *qui fait avec l'horizon un angle dont la tangente est égale à* 0,5.

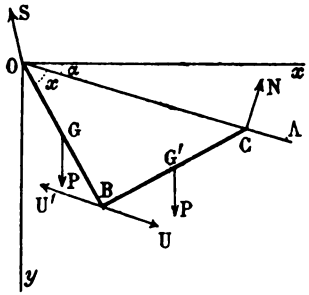
Une barre rectiligne OB, *pesante et homogène, est mobile autour de son extrémité* O, *qui est fixe sur* OA; *à l'extrémité* B *s'articule l'extrémité* B *d'une autre barre* BC *rectiligne, pesante, homogène, égale et identique à* OB. *La barre* BC *peut ainsi tourner autour du point* B; *en outre, l'extrémité* C *de cette barre est assujettie à glisser sur la droite fixe* OA.

1° *On demande de trouver la position d'équilibre de ce système, en supposant qu'il n'y ait aucun frottement; on demande en outre de calculer, pour cette position d'équilibre, les pressions qui se produisent en* O, B *et* C.

2° *Si l'on fait tourner* OB *autour du point* O, *avec une vitesse angulaire* ω, *on demande de calculer la somme algébrique des projections sur la verticale, des vitesses des points milieux de* OB *et de* BC; *on exprimera cette somme en fonction de* ω *et de l'angle* BOC; *on remarquera la valeur que prend cette somme quand le système passe par sa position d'équilibre.*

3° *On demande de trouver les positions d'équilibre du système quand le point* C *frotte sur* OA *et que le coefficient de frottement est égal à* 0,5. *On admettra d'ailleurs qu'il n'y a aucun frottement sur les articulations* B *et* O.

1° Les forces qui sollicitent le système sont : les poids P appliqués aux milieux G, G′ des barres, la réaction N de OA normale à OA puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de frottement, la réaction S du point fixe O, enfin les actions mutuelles U, U′ égales et directement opposées qui se manifestent à la charnière B.



Nous poserons

$$\widehat{AOB} = x, \qquad OB = BC = 2l.$$

Les projections des forces sur l'horizontale Ox et la verticale descendante Oy sont fournies par le tableau suivant :

	Ox	Oy
N	$N \sin \alpha$	$-N \cos \alpha$
U	X	Y
U′	$-X$	$-Y$
S	X_1	Y_1
P	0	P

Nous avons d'autre part, pour les coordonnées des points G, G′, B,

$$(G)\begin{cases} x = l \cos (x + \alpha), \\ y = l \sin (x + \alpha); \end{cases}$$

$$(G')\begin{cases} x = l\cos(x+\alpha) + 2l \cos x \cos \alpha, \\ y = l \sin (x + \alpha) + 2l \cos x \sin \alpha; \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} x = 2l \cos (x + \alpha), \\ y = 2l \sin (x + \alpha). \end{cases}$$

Équilibre de OB. — Les forces en action sur cette barre étant U, S, P, nous obtiendrons en projetant sur Ox, sur Oy et en prenant les moments par rapport à O,

$$(1) \qquad X + X_1 = 0,$$

$$(2) \qquad Y + Y_1 + P = 0,$$

$$(3) \qquad P \cos (\alpha + x) + 2Y \cos (\alpha + x) - 2X \sin (\alpha + x) = 0.$$

Équilibre de BC. — Nous obtiendrons pareillement, pour l'équilibre de BC,

$$(4) \qquad N \sin \alpha - X = 0,$$

$$(5) \qquad -N \cos \alpha - Y + P = 0,$$

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} -2\cos(x+\alpha)Y+2\sin(x+\alpha)X \\ \qquad +P[\cos(x+\alpha)+2\cos x\cos\alpha]-4N\cos x=0. \end{array}\right.$$

Ces 6 équations vont nous donner x, N, X, Y, X_1, Y_1.

Ajoutons (1) et (6) membre à membre, il viendra

$$(7)\qquad P[\cos(x+\alpha)+\cos x\cos\alpha]-2N\cos x=0.$$

Éliminons X, Y entre (3), (4) et (5), nous obtiendrons

$$P\cos(\alpha+x)+2\cos(\alpha+x)(P-N\cos\alpha)-2N\sin\alpha\sin(\alpha+x)=0,$$

ou bien

$$(8)\qquad 3P\cos(\alpha+x)-2N\cos x=0.$$

Enfin, éliminons N entre (7) et (8), nous aurons

$$\cos\alpha\cos x-2\sin\alpha\sin x=0,$$

d'où nous tirons

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}=1$$

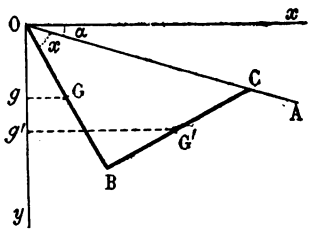
et

$$x=45^\circ.$$

Dans sa position d'équilibre, le triangle OBC sera donc rectangle en B. En remplaçant x par sa valeur dans les équations qui précèdent, on obtiendra sans difficulté pour les réactions

$$N=\frac{3\sqrt{5}}{10}P;\quad X=\frac{3P}{10},\quad Y=\frac{2P}{5};\quad X_1=-\frac{3P}{10},\quad Y_1=-\frac{7}{5}P.$$

2° D'après un théorème connu, nous avons à calculer les vitesses des projections g, g'.



Or, en choisissant convenablement l'origine des temps, nous pouvons poser $x=\omega t$, de sorte qu'il vient

$$Og=\sin(\alpha+\omega t),$$

$$Og'=\sin(\alpha+\omega t)+2\sin\alpha\cos\omega t,$$

les longueurs des barres étant représentées par 2 pour simplifier. Ceci posé, la vitesse étant la dérivée de l'espace par rapport au temps, nous avons

$$V_g=\omega\cos(\alpha+\omega t),$$

$$V_{g'}=\omega\cos(\alpha+\omega t)-2\omega\sin\alpha\sin\omega t;$$

d'où

$$V_g + V_{g'} = 2\omega[\cos(\alpha + \omega t) - \sin\alpha \sin\omega t];$$

mais $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; en substituant, nous obtenons

$$V_g + V_{g'} = \frac{4\omega}{\sqrt{5}}(\cos x - \sin x).$$

Dans le cas particulier de l'équilibre, cette somme est nulle, comme nous aurions pu le déduire d'ailleurs, du Principe des travaux virtuels.

3° Dans le cas où il y a frottement en C, il faut ajouter aux forces considérées dans (1°) une force F appliquée en C et ayant pour droite d'action OA.

En écrivant que le système est en équilibre dans ces nouvelles conditions, on obtient d'abord les trois équations (1), (2), (3); puis, F (étant supposée dirigée dans le sens $\overline{CA}$),

$$N\sin\alpha - X + F\cos\alpha = 0, \tag{9}$$

$$-N\cos\alpha - Y + P + F\sin\alpha = 0, \tag{10}$$

$$-2\cos(x+\alpha)Y + 2\sin(x+\alpha)X + P[\cos(x+\alpha) + 2\cos x\cos\alpha] - 4N\cos x = 0. \tag{11}$$

Nous obtenons, en éliminant X, Y entre (3), (9), (10) et (11),

$$3P\cos(\alpha + x) - 2N\cos x - 2F\sin x = 0,$$

et

$$P[\cos(x+\alpha) + \cos x\cos\alpha] - 2N\cos x = 0.$$

Ces deux équations nous donnent

$$F = \frac{2\cos(\alpha + x) - \cos\alpha\cos x}{2\sin x}P,$$

$$N = \frac{\cos(\alpha + x) + \cos\alpha\cos x}{2\cos x}P.$$

F devant être positive, nous avons d'abord

$$2\cos(\alpha + x) - \cos\alpha\cos x > 0,$$

d'où

$$x < 45^\circ. \tag{12}$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que $\frac{F}{N}$ soit inférieur ou au plus égal au coefficient de frottement $\frac{1}{2}$; nous aurons donc

$$\frac{2\cos(\alpha+x)-\cos\alpha\cos x}{\operatorname{tg} x[\cos(\alpha+x)+\cos\alpha\cos x)]}<\frac{1}{2},$$

ou bien

$$\frac{4(1-\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x(4-\operatorname{tg} x)}<1,$$

ou encore

$$\frac{4-8\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x(4-\operatorname{tg} x)}<0;$$

mais, d'après (12), on a $4-\operatorname{tg} x>0$ et il reste

$$4-8\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x<0,$$

ce qui donne, eu égard à (12),

$$1>\operatorname{tg} x>2(2-\sqrt{3}).$$

Si nous supposons maintenant que F soit dirigée suivant $\overline{CO}$, on devra avoir

$$F<0,$$

d'où $$x>45^\circ.$$

Il vient ensuite

$$\frac{4(\operatorname{tg} x-1)}{\operatorname{tg} x(4-\operatorname{tg} x)}<1,$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x-4}{\operatorname{tg} x\,(4-\operatorname{tg} x)}<0,$$

d'où $\operatorname{tg} x<2$, c'est-à-dire $x<90^\circ-\alpha$.

En résumé, il y aura équilibre quand x sera compris entre $90^\circ-\alpha$ et le plus petit arc positif ayant pour tangente $2(2-\sqrt{3})$.

Année 1896.

362. — *Un parallélépipède rectangle repose par une de ses faces sur un plan horizontal* H, *sur lequel il glisse* avec frottement. *Une corde flexible, inextensible, de masse négligeable, est attachée au centre* O *de l'une des faces verticales* FF′ ; *elle demeure tendue horizontalement et normalement à la face* FF′. *La corde s'enroule sur une roue dont le centre* A *est dans le plan* H ; *dont le plan coupe normalement en leur milieu les arêtes horizontales de la face* FF′, *et dont enfin le diamètre est égal à la hauteur* FF′ *du parallélépipède.*

Un levier AB *est solidaire de la roue et figure un de ses rayons prolongé ; ce levier porte à son extrémité* B *un poids.*

On désignera par P *le poids du parallélépipède ; par* P′ *le poids placé en* B ; *par* l *la longueur du levier* AB ; *par* f *le coefficient de frottement ; par* I *le moment d'inertie, par rapport à l'axe de la roue, du système formé par la roue et le levier* AB, *abstraction faite du poids* P′.

1° *On demande de délimiter les valeurs de l'inclinaison du levier* AB *sur le plan* H, *pour lesquelles le système demeure en équilibre.*

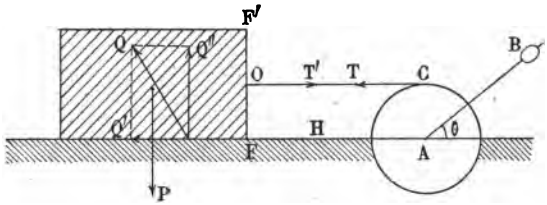
2° *On abandonne sans vitesse le levier* AB *sous une inclinaison pour laquelle l'équilibre n'a plus lieu ; le mouvement se produit. Trouver l'expression de la force vive du système formé par le parallélépipède, la roue, le levier et le poids* P′.

3° *Calculer le travail accompli par les forces, sans oublier le frottement, quand le levier, parti sans vitesse de l'inclinaison* θ_0, *a acquis l'inclinaison* θ.

4° *Écrire l'équation des forces vives.*

5° *On suppose la corde assez longue pour qu'elle puisse s'enrouler librement sur la roue. Dire, d'après l'équation précédente, si, pour une certaine valeur de* θ, *l'enroulement prendra fin. Que devient alors le mouvement du système ?*

1° Pour que le système soit en repos, le fil étant tendu, il faut et il suffit que le parallélépipède d'une part, la roue et le levier d'autre part, soient séparément en équilibre.



Équilibre du parallélépipède. — Sous l'action de la tension T' du fil, il se développe au contact du solide et du plan horizontal des réactions qui sont obliques à cause du frottement; ces réactions se composent en une seule Q, qui, par raison de symétrie, est située dans le plan de la figure. Décomposons Q en deux autres, l'une Q' horizontale, l'autre verticale Q''.

Si nous supposons que la base d'appui du parallélépipède est assez grande pour qu'il ne puisse pas basculer, l'équilibre existera quand on aura

$$T' = Q', \qquad Q'' = P;$$

mais $\qquad Q' \leqslant fQ'' \qquad$ ou $\qquad Q' \leqslant fP;$

il viendra donc

$$(1) \qquad T' \leqslant fP.$$

Équilibre de la roue et du levier. — Le bras du levier étant supposé de poids négligeable, les forces qui agissent sur ce système sont le poids P' et la tension $T = T'$ du fil qui s'exerce au point de contact C. Pour que ces deux forces tiennent la roue en repos, il faut et il suffit que la somme de leurs moments par rapport au point fixe A soit nulle; nous aurons donc

$$Tr = P'l \cos\theta,$$

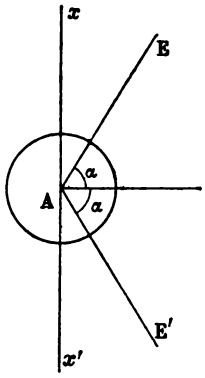
r étant le rayon de la roue, et il viendra en vertu de (1)

$$\frac{P'l}{r} \cos\theta \leqslant fP,$$

d'où

$$(2) \qquad \cos\theta \leqslant \frac{fPr}{P'l}.$$

Or, supposons $\frac{fPr}{P'l} \geqslant 1$; dans ce cas, l'inégalité précédente sera toujours vérifiée et le système restera en repos pour toute position du levier. Si, au contraire, nous avons $\frac{fPr}{P'l} < 1$, en appelant α le plus petit arc positif qui a pour cosinus $\frac{fPr}{P'l}$, l'inégalité (2) délimitera l'arc θ comme il suit :



$$\alpha < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou bien} \quad -\alpha > \theta > -\frac{\pi}{2}.$$

En résumé, le système sera en équilibre quand le levier AB sera situé dans l'un des angles EAx, $E'Ax'$.

2° Soit, à l'instant t, ω la vitesse angulaire de la roue; la vitesse de translation du parallélépipède sera égale à celle d'un point de la circonférence de la roue, c'est-à-dire à $r\omega$; la vitesse du point B sera $l\omega$, et nous aurons :

Force vive de la roue et du bras de levier $= I\omega^2$,

— du poids P' $= \frac{P'}{g} l^2\omega^2$,

— du parallélépipède $= \frac{P}{g} r^2\omega^2$.

Par conséquent, si nous représentons par $2\mathcal{T}$ la force vive du système, nous aurons

$$2\mathcal{T} = \left(I + \frac{P}{g} r^2 + \frac{P'}{g} l^2\right)\omega^2.$$

3° Les seules forces qui produisent du travail sont la force de frottement et le poids P'.

Nous avons d'ailleurs :

Travail dû à la force de frottement $= -fPr(\theta_0 - \theta)$,

— au poids P' $= P'l(\sin\theta_0 - \sin\theta)$;

et le travail total a pour expression

$$\varphi(\theta) = -fPr(\theta_0 - \theta) + P'l(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

4° L'équation des forces vives s'écrira donc

$$\left(I + \frac{P}{g} r^2 + \frac{P'}{g} l^2\right) \frac{\omega^2}{2} = P'l(\sin\theta_0 - \sin\theta) - fPr(\theta_0 - \theta).$$

5° Le mouvement du système est caractérisé par la variation de ω ou de ω^2, ou plus simplement encore par la variation de la fonction continue $\varphi(\theta)$.

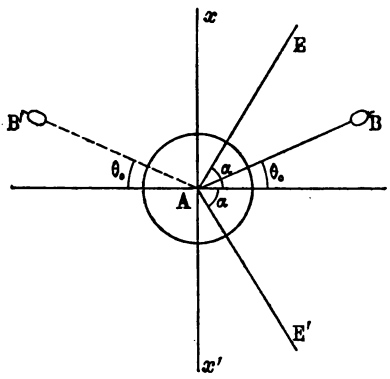
Or, nous avons

$$\varphi'(\theta) = -P'l\cos\theta + fPr = -P'l(\cos\theta - \cos\alpha);$$

et nous pourrons dresser le tableau suivant :

θ	$\varphi'(\theta)$	$\varphi(\theta)$
θ_0	—	0 ↘
		+
déc.		cr.
$-\alpha$	0	$\varphi(-\alpha)$ Max.
$-\frac{\pi}{2}$	+	déc.
$-(\pi+\theta_0)$	+	— ↙

Nous voyons ainsi à l'inspection des variations de $\varphi(\theta)$, que ω, qui part de zéro, croît jusqu'à un maximum qui se produit pour $\theta = -\alpha$, puis décroît et s'annule pour θ compris entre $-\alpha$ et $-(\pi+\theta_0)$. Le levier s'arrêtera donc et ne pourra atteindre jusqu'à la position AB′ symétrique de AB.



Supposons $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$, le levier s'arrêtera dans l'angle E′Ax' et il n'y aura pas de mouvement ultérieur.

Si nous avons, au contraire, $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0$, le levier s'arrêtera à gauche de Ax' et le mouvement ultérieur sera pendulaire.

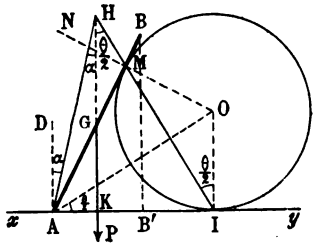
Année 1897.

363. *Un disque circulaire peut rouler, mais rouler seulement et non glisser, sur une droite horizontale xy. Une tige* AB, *homogène, égale en longueur au diamètre du disque, repose par son extrémité* A *sur la droite xy et s'appuie tangentiellement sur le disque.*

Entre quelles limites doit être comprise l'inclinaison θ *de la tige* AB *sur la droite xy pour que le système de la tige et du disque soit en équilibre? On suppose essentiellement que le glissement de la tige* AB *sur le disque implique un frottement, ainsi que le glissement du point* A *sur la droite xy. On supposera égaux les coefficients de ces deux frottements et on représentera leur valeur commune par* $\operatorname{tg}\varphi$, φ *désignant un angle moindre que* 45°.

Montrer que l'équilibre deviendrait impossible, eu égard aux dimensions de la tige, si le coefficient de frottement était moindre que $\frac{1}{2}$.

Équilibre du disque. — Le disque est soumis à son poids et à l'action de la barre en M.



Comme son poids passe par le point de contact I, il faudra, pour qu'il soit en équilibre, que l'action de la barre en M passe aussi par I.

Équilibre de la barre. — Les forces en action sur la barre AB sont : son poids P appliqué au milieu G, la réaction du disque, dont la droite d'ac-

tion est MI, comme nous venons de le voir dans l'étude du disque, et la réaction de xy sur l'extrémité A.

Par conséquent, si l'on décompose le poids P de la barre suivant HM et HA, on obtiendra deux composantes qui, pour l'équilibre, devront être détruites par les réactions du disque et de la droite xy.

Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après la théorie du frottement, que les angles

$$\mathrm{HMN} = \frac{\theta}{2}, \qquad \mathrm{HAD} = \alpha,$$

soient inférieurs ou égaux à l'angle commun φ du frottement.

Nous aurons donc

$$(1) \qquad \frac{\theta}{2} \leqslant \varphi,$$

$$(2) \qquad \alpha \leqslant \varphi.$$

Je dis que l'inégalité (1) entraîne l'inégalité (2). En effet, nous avons visiblement

$$\mathrm{AK} = \mathrm{KB'},$$

d'où

$$\mathrm{AK} < \mathrm{KI},$$

ou bien

$$\mathrm{HK}.\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{HK}\ \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire

$$\alpha < \frac{\theta}{2}.$$

Ceci posé, il reste l'unique condition

$$\frac{\theta}{2} \leqslant \varphi,$$

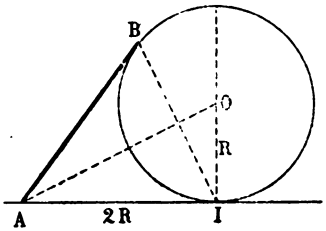
d'où

$$\theta \leqslant 2\varphi.$$

Quand θ deviendra égal à 2φ, la barre sera sur le point de glisser sur le disque.

Enfin, la barre étant assujettie à reposer tangentiellement sur le disque, il résulte pour θ une limite inférieure.

Plaçons-nous dans le cas limite où la barre est tangente en son extrémité B ; nous avons



$$\operatorname{tg}.\widehat{OAI} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\widehat{OAI} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2},$$

et l'angle $\frac{\theta}{2}$ doit être supérieur à $\widehat{OAI}$.

En résumé, l'angle θ est délimité comme il suit :

$$2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\varphi.$$

Pour que cette double inégalité soit possible, nous voyons que l'on doit avoir

$$2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} \leqslant 2\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{tg}\varphi.$$

TABLE DES MATIÈRES

STATIQUE

		Pages
CHAPITRE I.	— Forces concourantes. Équilibre du point matériel	1
CHAPITRE II.	— Équilibre du point matériel gêné	25
CHAPITRE III.	— Forces parallèles. — Barycentres	38
CHAPITRE IV.	— Centres de gravité	61
	Centres de gravité des lignes	61
	Centres de gravité des surfaces	65
	Centres de gravité des volumes	78
	Théorèmes de Guldin	88
CHAPITRE V.	— Forces appliquées à un solide. Equilibre du solide libre	96
CHAPITRE VI.	— Équilibre du solide gêné	109
CHAPITRE VII.	— Équilibre des systèmes	139
CHAPITRE VIII.	— Machines	158

CINÉMATIQUE

CHAPITRE I.	— Mouvement du point	185
CHAPITRE II.	— Mouvement projeté sur un axe. Composition et décomposition de mouvements. Mouvement relatif	214
CHAPITRE III.	— Mouvement des projectiles dans le vide	234
CHAPITRE IV.	— Déplacement d'une figure plane dans son plan	244
CHAPITRE V.	— Mouvement du solide. — Composition des translations et des rotations	253
CHAPITRE VI.	— Transformation et transmission de mouvements. Systèmes articulés. Mécanismes	261

DYNAMIQUE

Pages

Chapitre I. — Forces. Masses. Accélérations . . . . . [illegible]
Chapitre II. — Mouvement sur le plan incliné poli . . . . [illegible]
Chapitre III. — Force centrifuge . . . . . [illegible]
Chapitre IV. — Travail . . . . . [illegible]
Chapitre V. — Moments d'inertie . . . . . [illegible]
Chapitre VI. — Théorème des forces vives. Pendule. Volants. [illegible]
Chapitre VII. — Principe du travail virtuel . . . . . [illegible]
Chapitre VIII. — Transmission du travail dans les machines . [illegible]
Chapitre IX. — Frottement . . . . . [illegible]

Concours général de Première-Sciences.

Année 1895 . . . . . [illegible]
» 1896 . . . . . [illegible]
» 1897 . . . . . [illegible]

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.